Über Raumkurven, zwischen deren beiden Krümmungen eine Beziehung besteht.

==========

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät

der

Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

vorgelegt von

Friedrich Klaucke
aus Spremberg (Lausitz).

Halle (Saale).
Druck von Heinrich John.
1916.

Referent: Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Wangerin.

Tag der mündlichen Prüfung: 1. Juli 1914.

Meinen lieben Eltern.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 7

I. Abschnitt. — Die Bertrandschen Kurven.

§ 1. Herleitung der wichtigsten Eigenschaften der Bertrandschen Kurven 9

§ 2. Die endlichen Gleichungen der Bertrandschen Kurven 22

§ 3. Erzeugung von Bertrandschen Kurven und Anwendungen in der Kurventheorie 28

§ 4. Die rektifizierende Fläche der Bertrandschen Kurven 32

§ 5. Die Bertrandschen Kurven in der Flächentheorie 35

II. Abschnitt. — Die Kurven, zwischen deren Krümmungen eine Beziehung zweiten Grades besteht.

§ 1. Ableitung der allgemeinen Beziehung zweiten Grades und eines Spezialfalles 54

§ 2. Diskussion der Cesaroschen Bedingungsgleichung 58

§ 3. Weitere Untersuchungen über die Cesaroschen Raumkurven, ihre endlichen Gleichungen und Fragen aus der Flächentheorie 72

§ 4. Die Beziehung $\frac{a}{\rho^2} + \frac{b}{r^2} = \frac{1}{\rho}$ 79

§ 5. Die Beziehung $\frac{u}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\rho}$ 89

§ 6. Die Hauptnormalenfläche und die rektifizierende Fläche der Kurven $\frac{u}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\rho}$ 96

Seite

§ 7. Die Beziehung $\frac{a}{\rho^2} + \frac{b}{r^2} = \frac{1}{r}$ 107

§ 8. Die Beziehung $\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}$ 111

III. Abschnitt. — Über Kurven, zwischen deren Krümmungen eine Beziehung vom Grade > 2 besteht.

§ 1. Zwei Beziehungen dritten Grades 114

§ 2. Beziehungen vierten und sechsten Grades . . . 119

Literaturanhang 121

Einleitung.

Eine Kurve ist ihrer Gestalt nach im Raume vollkommen bestimmt, wenn ihre Krümmungen als Funktionen der Bogenlänge bekannt sind. Da diese Gleichungen die Kurve unabhängig von einem beliebigen Koordinatensystem festlegen, so bezeichnet man sie als die natürlichen Gleichungen der Kurve.

Besonderes Interesse haben nun die Kurven gefunden, bei denen durch Elimination der Bogenlänge einfache Beziehungen zwischen den Krümmungen hervorgehen.[1]) Von diesen sind bisher näher untersucht worden die Kurven mit linearer und quadratischer Relation, während sich an vereinzelten Stellen auch Relationen vierten und sechsten Grades finden.

Zusammenfassende Darstellungen dieser Kurvenarten sind bereits vorhanden in der Enzyklopädie III, D 4, S. 230/37 von Scheffers und speziell über die Relation zweiten Grades in einer Dissertation von Joachimi, Münster 1911. Da sich die Darstellung in der Enzyklopädie, wie es bei dem Werke selbstverständlich ist, auf die Angabe des notwendigsten beschränkt, und auch die Arbeit von Joachimi neben historischen Irrtümern besonders in den Literaturangaben noch beträchtliche Lücken aufweist, so dürfte es nicht überflüssig sein, im folgenden eine zusammenfassende Darstellung dieser Kurvenarten zu geben, wobei ich besonderes Gewicht darauf gelegt habe, die Literatur vollständig heranzuziehen. Außerdem glaube ich durch eigene Unter-

[1]) Ähnliche Fragen sind behandelt worden von Hoppe: Lehrbuch der analytischen Kurventheorie, Leipzig 1880, S. 72, wo Kurven bestimmt werden, zwischen deren Kontingenz- und Torsionswinkel eine Beziehung besteht.

suchungen zur weiteren Kenntnis dieser Kurven in manchen Punkten beigetragen zu haben.

Was die gebrauchten Bezeichnungen anbetrifft, so habe ich mich im allgemeinen an die von Scheffers in seinem Lehrbuche: „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie“ gebrauchten gehalten, nur in den Ausdrücken für die Krümmungen weiche ich von ihm ab, indem ich für die Krümmung $\frac{1}{\rho}$, für die Torsion $\frac{1}{r}$ benutze, da diese Bezeichnungen in der Literatur gebräuchlicher sind.

Bei der Anordnung des Stoffes hätte man wohl in dieser Arbeit die zeitliche Entwickelung der Theorie dieser Kurven als Leitfaden nehmen können; da sich bei dieser Anordnung aber Wiederholungen nicht hätten vermeiden lassen, so habe ich davon abgesehen und dafür am Schlusse der Arbeit ein Literaturverzeichnis in chronologischer Reihenfolge hinzugefügt. Im Texte selbst und in den Zitaten weist die Bezeichnung „Lit.“ mit der folgenden Nummer auf die Literaturangaben im Anhang hin.

Die Abhandlung ist aus der Bearbeitung einer Preisaufgabe der Philosophischen Fakultät der Vereinigten Friedrichs-Universität Halle-Wittenberg hervorgegangen, der bei der öffentlichen Verkündigung am 27. Januar 1914 der Preis zuerkannt wurde.

Die Drucklegung wurde durch den Ausbruch des Krieges verzögert.

I. Abschnitt.

Die Bertrandschen Kurven.

§ 1.

Herleitung der wichtigsten Eigenschaften der Bertrandschen Kurven.

Die Anregung zur Entdeckung der Bertrandschen Kurven verdanken wir du Saint Venant, der in seiner Arbeit: „Mémoires sur les lignes courbes non planes“ [1]) in einer Anmerkung auf S. 48 die Frage aufwarf, ob es auf der Hauptnormalenfläche einer Kurve eine zweite Kurve geben könne, deren Hauptnormalen auch mit den Erzeugenden der Fläche zusammenfielen. Die erste Antwort findet sich bei Bertrand in seinem: „Mémoire sur les courbes à double courbure“. [2]) Er stellte hier den Satz auf, daß es auf einer Regelfläche keine, eine, zwei oder unendlich viele Kurven geben könne, deren Hauptnormalen die Erzeugenden der Fläche sind. Zur letzten Klasse gehören die ebenen Kurven und die gemeinen Schraubenlinien. Für uns sind hier von Interesse die Flächen, auf denen es zwei Kurven mit der genannten Eigenschaft gibt. Zwischen den Krümmungen jeder der beiden Kurven muß dann eine lineare Beziehung bestehen. Nach ihrem Entdecker haben sie den Namen Bertrandsche Kurven erhalten. [3])

[1]) Lit. 14.

[2]) Lit 15. Ein Irrtum auf S. 340 wurde von Graves berichtigt, s. Curtis, Lit. 17.

[3]) Nach Bertrand gab einen einfachen analytischen Beweis J.-A. Serret (Lit. 16). Rein geometrische Ableitungen finden sich bei Schell: Lit. 10 u. bei Mannheim: Lit. 7. An dieser Stelle will ich noch auf einen Brief von M.-O. Bonnet an Mannheim hinweisen, der in den Comptes Rendus 85 (1877), S. 749 abgedruckt ist. Er sagt darin, daß er

Wir gehen von der Kurve C:

$$x = f_1(s), \qquad y = f_2(s), \qquad z = f_3(s)$$

aus, deren Hauptnormalen gleichzeitg Hauptnormalen einer zweiten Kurve C′ sein sollen. Dann haben wir die Koordinaten dieser zweiten Kurve in der Form:

(1) $\quad x' = x + al \qquad y' = y + am \qquad z' = z + an$

wo $a = f(s)$ die Strecke ist, die die Kurve C′ auf den Hauptnormalen von C abschneidet. Die Differentiation nach s gibt auf Grund der Frenetschen Formeln:

$$(2) \qquad \frac{dx'}{ds} = \alpha + l\frac{da}{ds} - a\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{r}\right)$$

und zwei entsprechende. Multiplizieren wir die drei Gleichungen bzw. mit l, m, n und addieren sie, so erhalten wir

$$\frac{da}{ds} = 0$$

also

(3) $\quad a = \text{konst.}$

Es gilt daher der

Satz 1: Haben zwei Kurven gemeinsame Hauptnormalen, so ist der Abstand entsprechender Punkte konstant.

Für das Verhältnis der Bogenelemente beider Kurven ergibt sich, wenn man die drei Gleichungen

$$(4) \qquad \alpha' \frac{ds'}{ds} = \alpha\left(1 - \frac{a}{\rho}\right) - \lambda\frac{a}{r}$$

und die analogen quadriert und addiert:

$$(5) \qquad \frac{ds'}{ds} = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}}.$$

Durch Kombination der Gleichungen (4) und (5) erhalten wir:

$$\alpha' = \frac{\alpha\left(1 - \frac{a}{\rho}\right) - \lambda\frac{a}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}}} \qquad \text{usw.}$$

---

das Problem vor Bertrand schon in allgemeinerer Form gelöst habe, nämlich für zwei Kurven, die nur Orthogonaltrajektorien und nicht zugleich Asymptotenlinien einer Regelfläche sind. Statt des Krümmungs- und Torsionsradius treten die Radien der geodätischen Krümmung und Torsion auf. Diese Arbeit findet sich im Journ. de l'École Polyt. 32 (1848).

Multiplikation der drei Gleichungen mit α, β, γ und Addition gibt:

$$\Sigma \alpha \alpha' = \frac{1 - \frac{a}{\rho}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}}}.$$

Dies ist aber der Kosinus des Winkels, den zwei entsprechende Tangenten der Kurven miteinander bilden; bezeichnen wir ihn mit φ, so wird

$$\cos \varphi = \frac{1 - \frac{a}{\rho}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}}}, \tag{6}$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{a}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{a^2}{r^2}}}. \tag{7}$$

Wir können also die Richtungskosinus der Tangente der zweiten Kurve folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha \cos \varphi - \lambda \sin \varphi, \\ \beta' &= \beta \cos \varphi - \mu \sin \varphi, \\ \gamma' &= \gamma \cos \varphi - \nu \sin \varphi. \end{aligned} \tag{8}$$

Differenzieren wir diese wieder nach r, so erhalten wir

$$\frac{l'}{r'} \frac{ds'}{ds} = l \left(\frac{\cos \varphi}{\rho} - \frac{\sin \varphi}{r}\right) - \frac{d\varphi}{ds} (\alpha \sin \varphi + \lambda \cos \varphi) \tag{9}$$

und zwei entsprechende.

Da die Hauptnormalen beider Kurven zusammenfallen sollen, so muß

$$\Sigma \alpha l' = 0 \qquad \Sigma \lambda l' = 0$$

sein. Multiplizieren wir daher die drei Formeln (9) bezw. mit α, β, γ und ebenso mit λ, μ, ν und addieren, so folgt

$$\frac{d\varphi}{ds} \cos \varphi = 0 \qquad \frac{d\varphi}{ds} \sin \varphi = 0$$

also

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \varphi = \text{konst.}$$

Daher gilt

Satz 2: Der Winkel entsprechender Tangenten ist konstant.[1])

Es sei noch auf einen Irrtum in der Enzyklopädie hingewiesen, den Voß[2]) bemerkt hat. Dort befindet sich in einer Anmerkung auf Seite 232 der Satz: Trägt man auf den Hauptnormalen einer Kurve konstante Strecken ab, und hat die Kurve der Endpunkte die Eigenschaft, daß ihre Schmiegungsebenen mit den entsprechenden der Urkurve konstante Winkel bilden, so sind beide Kurven Bertrandsche Kurven (vgl. Niewenglowski, Lit. 22). Voß zeigt nun, daß dies auch für Kurven gilt, zwischen deren Krümmungen die quadratische Beziehung

$$\frac{k}{\rho^2} + \frac{k}{r^2} = \frac{1}{\rho}$$

besteht. Der Satz wird richtig, wenn man Normalebene statt Schmiegungsebene setzt. Auf Seite 75 weist er noch einmal allgemein nach, daß, wenn man auf den Hauptnormalen einer Kurve eine konstante Strecke abträgt, und die Schmiegungsebenen der Kurve der Endpunkte mit denen der Grundkurve konstante Winkel bilden, das Kurvenpaar kein Bertrandsches zu sein braucht, sondern, daß dadurch noch eine andere von einer willkürlichen Funktion abhängige Klasse von Kurvenpaaren bestimmt wird.

Nach (6) und (7) ist

$$\frac{a}{r}\cos\varphi = \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\sin\varphi,$$

also besteht zwischen den Krümmungen der ersten Kurve die Beziehung

$$\frac{\sin\varphi}{\rho} + \frac{\cos\varphi}{r} = \frac{\sin\varphi}{a}. \tag{10}$$

Setzen wir $a \cot g\, \varphi = b$, so wird (10)

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1. \tag{11}$$

Wir erhalten daher den von Bertrand gefundenen

Satz 3: Damit die Hauptnormalen einer Kurve gleichzeitig Haupt-

[1]) Lit. 17, S. 224.
[2]) Lit. 66, S. 17.

normalen einer zweiten Kurve sind, muß zwischen den Krümmungen der Kurve eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen.[1])

Nehmen wir umgekehrt an, daß zwischen den Krümmungen einer Kurve C eine lineare Relation besteht

$$\frac{u}{\rho} + \frac{v}{r} = w, \tag{11 a}$$

ohne daß ρ und r gleichzeitig konstant sind, so setzen wir

$$\frac{u}{w} = a, \qquad \frac{v}{w} = \operatorname{acot} g\, \varphi,$$

also a und φ konstant, und die Formeln (1) liefern uns eine eindeutig bestimmte Kurve C′, die dieselben Hauptnormalen besitzt wie C.

Umgekehrt hätten wir auch von der Kurve C′ ausgehen können und hätten dabei dieselben Resultate für diese Kurve erhalten. Zwischen den Krümmungen der zweiten Kurve muß also die Beziehung bestehen

$$\frac{\sin \varphi'}{\rho'} + \frac{\cos \varphi'}{r'} = \frac{\sin \varphi'}{a'}. \tag{12}$$

Aus der Bedingung, daß die Hauptnormalen beider Kurven zusammenfallen, folgt

$$l' = \varepsilon l \qquad m' = \varepsilon m \qquad n' = \varepsilon n, \tag{13}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ die gleiche oder entgegengesetzte Richtung der Hauptnormalen ausdrückt, und aus diesen Formeln und (8):

$$\begin{aligned} \lambda' &= \varepsilon\, (\alpha \sin \varphi + \lambda \cos \varphi), \\ \mu' &= \varepsilon\, (\beta \sin \varphi + \mu \cos \varphi), \\ \nu' &= \varepsilon\, (\gamma \sin \varphi + \nu \cos \varphi). \end{aligned} \tag{14}$$

Die Richtungskosinus in Verbindung mit den Sätzen 1 und 2 geben uns den

Satz 4: Die Fundamentaldreikante beider Kurven sind miteinander fest verbunden.

Die Gleichungen (1), (8), (13), (14) zeigen uns, daß wir bei Vertauschung der gestrichenen Buchstaben mit den ungestrichenen zu setzen haben

$$a' = \varepsilon a, \qquad \varphi' = -\varepsilon \varphi, \tag{15}$$

also wird (12):

[1]) Die Konstante b ist bei Bertrand noch unbestimmt. Curtis: Lit. 17.

(16) $$-\frac{\varepsilon \sin\varphi}{\rho'} + \frac{\cos\varphi}{r'} = \frac{\sin\varphi}{a}.$$

Dies ist die Beziehung, die zwischen den Krümmungen der zweiten Kurve bestehen muß.

Wir schließen hieran eine Diskussion der Beziehung

$$\frac{u}{\rho} + \frac{v}{r} = w.$$

1) Ist $u = 0 \quad (v \neq 0,\ w \neq 0),$

dann ist $r = -\frac{v}{w} = \text{konst.}$ Die Kurve C hat also konstante Torsion.

Es ist $\sin\varphi = 0$, $a = 0$, jedoch so, daß der Grenzwert ihres Verhältnisses einen bestimmten Wert ergibt, der die Torsion mißt. Da $a = 0$ ist, fallen beide Kurven zusammen.[1])

2) Ist $v = 0 \quad (u \neq 0,\ w \neq 0),$

so ist

$$\rho = \frac{u}{w} = a, \qquad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Nach (16) ist dann

$$\rho' = -\varepsilon\rho, \qquad \text{daher } \varepsilon = -1.$$

Wir erhalten also zwei Kurven konstanter Krümmung, von denen jede der Ort der Krümmungsmittelpunkte und der Mittelpunkte der Oskulationskugeln der anderen ist. In entsprechenden Punkten beider Kurven stehen die Tangenten aufeinander senkrecht.

3) $w = 0 \quad (u \neq 0,\ v \neq 0)$

gibt

$$\frac{\rho}{r} = -\frac{u}{v} = \text{konst.}$$

Die Kurve C ist also eine allgemeine Schraubenlinie. Da $a = \frac{u}{w} = \infty$, so liegt die zugeordnete Kurve im Unendlichen.

---

[1]) Diesen Spezialfall kann man, da nur eine Kurve existiert, eigentlich nicht zu den Bertrandschen Kurven rechnen. (Lilienthal I, S. 289), vgl. jedoch das Beispiel von Salkowski, S. 34.

4) Bestehen zwischen den Krümmungen der Kurve C die beiden Beziehungen

$$\frac{u}{\rho} + \frac{v}{r} = w, \qquad \frac{u_1}{\rho} + \frac{v_1}{r} = w_1,$$

so ist

$$\rho = \text{konst.}, \qquad r = \text{konst.}$$

Die Kurve ist eine Schraubenlinie auf einem Kreiszylinder. Da hier a beliebig gewählt werden kann, so gibt es unendlich viele Kurven mit gemeinsamen Hauptnormalen. Die Hauptnormalenfläche ist eine Schraubenfläche mit Leitebene.

5) Mehr als zwei Kurven erhält man auch, wenn $u = w = 0$ ist. Dann bleibt a unbestimmt und die Kurven sind eben.

6) Ist $u = v, \qquad w = 1,$

so wird

$$u = v = a, \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Die Summe der Krümmungen der Kurve C ist konstant.

Weitere Beziehungen:

Aus (5) und (7) folgt

$$r = \frac{a}{\sin \varphi} \frac{ds}{ds'}.$$

Vertauscht man die gestrichenen mit den ungestrichenen Buchstaben, so folgt mit Rücksicht auf (15):

$$r' = \frac{a}{\sin \varphi} \frac{ds'}{ds},$$

also ist

$$(17) \qquad r r' = \frac{a^2}{\sin^2 \varphi}$$

und wir haben den von Schell[1]) gefundenen

Satz 5: Das Produkt der Torsionsradien entsprechender Punkte beider Kurven ist konstant.

Da die rechte Seite als Quadrat stets positiv ist, so gilt noch der

Satz 6: Die Torsionen beider Kurven in entsprechenden Punkten haben gleiches Vorzeichen.

[1]) Lit. 10.

Durch Division der beiden Ausdrücke für r und r′ erhalten wir

$$\frac{r}{r'} = \frac{ds^2}{ds'^2}, \tag{18}$$

also

Satz 7: Die Torsionsradien in entsprechenden Punkten beider Kurven verhalten sich wie die Quadrate der Bogenelemente.

Scheidet man a aus den Gleichungen (10) und (16) aus, so erhält man

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{\frac{1}{\rho} + \frac{\varepsilon}{\rho'}}, \tag{19}$$

tut man dasselbe mit φ, so wird

$$a = \frac{\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}}{\frac{\varepsilon}{\rho' r} + \frac{1}{\rho r'}}. \tag{20}$$

Nach (13) ist

$$\frac{d l'}{ds'} = \varepsilon \frac{d l}{ds} \frac{ds}{ds'},$$

und da

$$\Sigma \left(\frac{d l}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}, \qquad \Sigma \left(\frac{d l'}{ds'}\right)^2 = \frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{r'^2},$$

so ergibt sich

$$\frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}{\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{r'^2}}.$$ [1])

Aus den Formeln (5) und (6) erhält man

$$\cos\varphi = \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\frac{ds}{ds'}.$$

Bei Vertauschung der gestrichenen mit den ungestrichenen Buchstaben wird mit Rücksicht auf (15):

$$\cos\varphi = \left(1 + \frac{\varepsilon a}{\rho'}\right)\frac{ds'}{ds},$$

[1]) Diese Beziehung findet sich schon bei Bertrand Lit. 15, S. 349.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

(21) $$\cos^2\varphi = \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon a}{\rho'}\right).$$

Sind K und K′ die Krümmungsmittelpunkte entsprechender Punkte von C und C′, so ist

$$CK = \rho, \qquad CK' = \varepsilon\rho' + a,$$
$$C'K' = \varepsilon\rho', \qquad C'K = \rho - a,$$

also

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = \frac{CK}{CK'} : \frac{C'K}{C'K'},$$

daher gilt

Satz 8: Sind K und K′ die Krümmungsmittelpunkte entsprechender Punkte der Kurven C und C′, so ist das Doppelverhältnis $CC'KK'$ konstant.[1])

Aus (10), (16), (17) ergibt sich

$$\frac{1}{\rho'} = \varepsilon\left(\frac{\rho\cos^2\varphi}{a(\rho - a)} - \frac{1}{a}\right) = \varepsilon\left(\frac{\cos^2\varphi}{\rho - a} - \frac{\sin^2\varphi}{a}\right),$$

(22) $$\frac{1}{\rho} = \frac{a + \varepsilon\rho'\sin^2\varphi}{a(\varepsilon\rho' + a)} = \frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon\rho' + a} + \frac{\sin^2\varphi}{a},$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{\sin 2\varphi}{2}\left(\frac{1}{\rho - a} + \frac{1}{a}\right),$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sin 2\varphi}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\varepsilon\rho' + a}\right).$$

Aus diesen Formeln folgt sofort eine Konstruktion der Elemente der zugeordneten Kurve, wenn die erste bekannt ist.[2]) So erhält man aus der ersten für $\varepsilon = +1$ den Wert von ρ', indem man die Hyperbel mit den Achsen $\sqrt{\rho - a}$ und $\sqrt{a}$ konstruiert. Der unter dem Winkel φ gegen die Abszissenachse geneigte Radiusvektor ist $\sqrt{\rho'}$.

---

[1]) Mannheim: Lit. 21 und Lit. 7, S. 369. Da dieses Verhältnis stets > 0 ist, so folgt, worauf Schell, S. 111 (dort Rechenfehler) hinweist, daß K und K′ entweder beide zwischen C und C′ oder beide außerhalb liegen, so daß das Verhältnis niemals harmonisch sein kann, wie Aoust: Lit. 1, S. 381 behauptet.

[2]) Aoust: Lit. 1, S. 380.

Eliminiert man φ aus (22) und (10), so erhält man die Krümmungen der zweiten Kurve ausgedrückt durch die der ersten mittels der Formeln:[1])

$$\rho' = \varepsilon \left[\frac{a^2\rho^2 + r^2(\rho - a)^2}{r^2\rho - a(\rho^2 + r^2)}\right], \tag{23}$$

$$r' = \frac{a^2\rho^2 + r^2(\rho - a)^2}{r\,\rho^2}.$$

Die erste dieser Formeln können wir auch in der Form schreiben:

$$\rho' = \varepsilon \left[\frac{\dfrac{a^2\rho^2 + r^2(\rho - a)^2}{\rho^2 + r^2}}{\dfrac{r^2\rho}{\rho^2 + r^2} - a}\right].$$

Hieraus folgen die von Aoust angegebenen Bedingungen für den Wert von ε. Da ρ' stets positiv und auch der Zähler positiv ist, so wird

$$\varepsilon = +1 \quad \text{für} \quad \frac{r^2\rho}{\rho^2 + r^2} > a$$

$$\varepsilon = -1 \quad \text{für} \quad \frac{r^2\rho}{\rho^2 + r^2} < a.$$

Da $\dfrac{r^2\rho}{\rho^2 + r^2}$ den Abstand der Striktionslinie der Hauptnormalenfläche von den Punkten der Kurve darstellt, so liegt im ersten Falle die Kurve C' zwischen der Kurve C und der Striktionslinie, im zweiten Falle liegt sie außerhalb.

Die Bedingung

$$\varepsilon \gtrless 0, \quad \frac{r^2\rho}{\rho^2 + r^2} \gtrless a$$

können wir unter Berücksichtigung von (10) auf die Form bringen:[2])

$$(\rho - a)\left[1 - \frac{\rho - a}{a\,\mathrm{cotg}^2\varphi}\right] \gtrless 0, \qquad \varepsilon \gtrless 0. \tag{24}$$

Nennen wir ϑ den Winkel, den zwei entsprechende Hauptnormalen bilden, wo also $\cos\vartheta = \pm 1$, so ergeben sich aus dieser Gleichung folgende Fälle:

---

[1]) Curtis: Lit. 17.

[2]) Voß: Lit. 66, S. 46.

I. $\varepsilon < 0, \qquad \vartheta = 0.$

Es kann sein

1) $a > \rho$, dann ist nach (21) auch $a > \rho'$; die Krümmungsmittelpunkte beider Kurven liegen zwischen diesen.

2) $a < \rho$, dann folgt aus (24) $\frac{a}{\sin^2 \varphi} < \rho$ und aus (21) $a < \rho'$; d. h. der Krümmungsmittelpunkt von C liegt über C′ hinaus, der von C′ über C hinaus. Für die Torsionsradien beider Kurven erhält man mit (17):

$$r' > a \operatorname{cotg} \varphi, \qquad r < \frac{2a}{\sin 2\varphi}.$$

II. $\varepsilon > 0, \qquad \vartheta = \pi.$

Es ist $\rho' > a$, die Krümmungsmittelpunkte beider Kurven liegen über C hinaus.

III. $\varepsilon > 0, \qquad \vartheta = 0.$

Nach (24) ist $a < \rho$, dann ist $\frac{a}{\sin^2 \varphi} > \rho$. Die Krümmungsmittelpunkte beider Kurven liegen über C′ hinaus.

$$r' < a \operatorname{cotg} \varphi, \qquad r > \frac{2a}{\sin 2\varphi}.$$

Der Fall $a > \rho$ ist hier unmöglich, wie (21) und (24) zeigen.

IV. $\varepsilon > 0, \qquad \vartheta = \pi$

ist überhaupt unmöglich.

Bestimmt man mit Gräbner[1]) den Radius u und den Windungsparameter k der Schmiegungsschraubenlinie der Kurve C, so erhält man für diese Größen, die bestimmt sind durch

$$u = \frac{r^2 \rho}{\rho^2 + r^2} = \frac{r \frac{r}{\rho}}{\frac{r^2}{\rho^2} + 1},$$

$$k = -\frac{r \rho^2}{\rho^2 + r^2} = -\frac{r}{\frac{r^2}{\rho^2} + 1},$$

wenn man für r seinen Wert aus (10) einsetzt,

[1]) Lit. 72, S. 24/26.

$$u = \frac{\frac{r}{\rho}\left(\frac{r}{\rho}\sin\varphi + \cos\varphi\right)\frac{a}{\sin\varphi}}{\frac{r^2}{\rho^2} + 1},$$

$$k = -\frac{a\left(\frac{r}{\rho} + \operatorname{cotg}\varphi\right)}{\frac{r^2}{\rho^2} + 1}.$$

Eliminiert man aus beiden $\frac{r}{\rho}$, so erhält man die Gleichung

$$\left(u - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(k + \frac{a}{2}\operatorname{cotg}\varphi\right)^2 = \left(\frac{a}{2\sin\varphi}\right)^2.$$

Hieraus folgt eine einfache Konstruktion der Elemente der beiden Kurven (Fig. 1). Beschreibt man den Kreis, der $a = AA'$ als Sehne und φ als Peripheriewinkel faßt, so ergeben sich für jeden beliebigen Punkt der Kurven die Werte für k, u und u'. In der Figur ist $AA' = a$; AB und A'B sind die Radien der ganzen Krümmung, die definiert sind durch

$$AB = \sqrt{\frac{\rho'^2 + r'^2}{\rho'^2\, r'^2}}, \quad A'B = \sqrt{\frac{\rho^2 + r^2}{\rho^2\, r^2}}.$$

A'M' ist der Durchmesser eines Kreises mit dem Radius ρ', AM der eines Kreises mit dem Radius ρ. Die Torsionsradien sind $A'N' = -r'$, $AN = -r$. $\sphericalangle$ N'M'A' ist der Winkel der rektifizierenden Kante von C' gegen die Tangente; $\sphericalangle$ NMA der der rektifizierenden Kante von C gegen die Tangente. Die drei Kreise schneiden sich im Punkte B. Die Geraden BM' und AN schneiden sich auf dem ersten Kreise in D, da sie senkrecht sind zu den Sehnen a und A'B. Entsprechendes gilt für MB und A'N', die sich in E auf dem Kreise schneiden. Da k zu der rektifizierenden Geraden parallel ist, so folgt der

Satz 8: Trägt man in entsprechenden Punkten zweier Bertrandschen Kurven auf den rektifizierenden Geraden die Torsionsradien ab, und verbindet deren Endpunkte N und N' mit den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten M und M', so erhält man drei Schnittpunkte B, E, D, die stets auf dem konstanten Kreise über a mit dem Peripheriewinkel φ liegen, und zwar liegt B so

auf der gemeinsamen Schraubungsachse, daß es den Windungsparameter k abschneidet.

Eine Konstruktion des Mittelpunktes der Oskulationskugel einer Bertrandschen Kurve, wenn der der zugeordneten bekannt ist, gab Mannheim.[1])

Wie bereits früher erwähnt wurde, gelangt Mannheim zu den Bertrandschen Kurven durch geometrische Betrachtungen.[2]) Diese Ableitung soll hier noch kurz wiedergegeben werden. Er betrachtet eine windschiefe Regelfläche und die Tangentialebene in einem beliebigen Punkte C einer Erzeugenden der Fläche. Alle Punkte lassen sich nun durch ihren Abstand v von C und alle Tangentialebenen durch ihre Neigung δ gegen die Tangentialebene in C darstellen. Beschreibt C eine Kurve, deren Hauptnormalen die Erzeugenden der Fläche sind, und setzt man $\frac{v}{\operatorname{tg}\delta} = u$, so kann die eindeutige Beziehung zwischen dem Punkte und der Tangentialebene durch die lineare Gleichung

$$\frac{v}{\rho} + \frac{u}{r} = 1$$

dargestellt werden. Diese kann als Gleichung einer Geraden aufgefaßt werden in bezug auf die Erzeugende als v-Achse und eine Senkrechte zur Tangentialebene in C als u-Achse. Diese Gerade nennt Mannheim die Hilfsgerade (droite auxiliaire) in bezug auf den Punkt C.

Man kann nun die Hilfsgeraden aller Erzeugenden der Fläche betrachten und nach der Enveloppe dieser Geraden fragen. Soll diese ein Punkt sein, d. h. sollen die Geraden ein Büschel bilden, so muß die lineare Relation

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1$$

bestehen, d. h. die Punkte C bilden eine Bertrandsche Kurve.

Schließlich will ich noch kurz eine Eigenschaft der Bertrandschen Kurven erwähnen, deren analytische Ableitung allgemeiner im zweiten Abschnitt (S. 57/58) gegeben wird. Nachdem

[1]) Lit. 30 und Lit. 7, S. 532/34.

[2]) Lit. 24, S. 848/49 und Lit. 7, S. 532/34.

Demoulin[1]) gezeigt hatte, daß bei Kurven konstanter Torsion die Achse der unendlich kleinen Schraubung ein Plückersches Konoid beschreibt, dehnte Mannheim[2]) diesen Satz auf Bertrandsche Kurven aus, indem er zeigte, daß auch diesen jene Eigenschaft zukommt. Die Achse der unendlich kleinen Schraubung ist beiden Kurven gemeinsam. Da ihr Abstand von der Kurve $\frac{r^2 \rho}{\rho^2 + r^2}$ ist, so folgt, daß sie außerhalb der Kurven liegt für $\varepsilon > 0$, zwischen beiden für $\varepsilon < 0$ (s. S. 18).

Die Frage nach den Kurven mit gemeinsamen Hauptnormalen kann dahin erweitert werden, daß man nach der Beziehung fragt, die zwischen den Krümmungen einer Kurve bestehen muß, wenn irgend eine Normale dieser Kurve mit einer Normalen einer zweiten Kurve zusammenfallen soll. Durch Spezialisierung dieser Frage findet sich dann in der Literatur an vielen Stellen die Bertrandsche Relation wieder. Ich gehe hier nicht weiter darauf ein und werde an den entsprechenden Stellen im zweiten Abschnitt darauf hinweisen.

§ 2.

Die endlichen Gleichungen der Bertrandschen Kurven.

In diesem Paragraphen wollen wir aus Betrachtungen über die sphärischen Indikatrizen der Bertrandschen Kurven ihre endlichen Gleichungen ableiten.[3])

Zunächst sei hier auf eine Arbeit von Pirondini hingewiesen, in der er aus Betrachtungen über die sphärischen Indikatrizen die Konstanz des Winkels der Tangenten erhält.[4])

Aus den Gleichungen (14) folgt durch Differentiation nach s unter Berücksichtigung der Frenetschen Formeln:

---

[1]) Bull. de la Soc. Math. de France 20 (1892), S. 43/46.

[2]) Lit. 7, S. 374.

[3]) Auf diesem Wege werden die endlichen Gleichungen erhalten bei Darboux: Lit. 4 I (1887), S. 45; Rouquet: Lit. 42; Scheffers: I 1910, S. 440/43. Ableitungen finden sich außerdem bei Molins: Lit. 47; Goursat: Lit. 32; Bianchi: Lit. 2, S. 32/34, s. die Anmerk. S. 26.

[4]) Lit. 43.

$$\frac{d\lambda'}{ds} = \varepsilon\left(\frac{\sin\varphi}{\rho} + \frac{\cos\varphi}{r}\right)l$$

und zwei entsprechende, also mit (10):

$$\frac{d\lambda'}{ds} = \varepsilon l\,\frac{\sin\varphi}{a} \qquad \text{usw.}$$

Wenn man die 3 Gleichungen quadriert und addiert, so erhält man

$$\Sigma\left(\frac{d\lambda'}{ds}\right)^2 = \frac{\sin^2\varphi}{a^2}.$$

λ', μ', ν' waren die Richtungskosinus der Binormalen von C', und da diese mit den rechtwinkligen Koordinaten der sphärischen Indikatrix der Binormalen identisch sind, so folgt, wenn $d\sigma$ das Bogenelement dieser Indikatrix ist,

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{\sin^2\varphi}{a^2}, \tag{26}$$

also

Satz 9: Das Verhältnis des Bogenelementes der sphärischen Indikatrix der Binormalen der einen Kurve zum Bogenelement der konjugierten Kurve ist konstant.

Dieser Satz gibt uns die Möglichkeit, die endlichen Gleichungen der Bertrandschen Kurven zu bestimmen.

Schreiben wir (26) in der Form

$$\frac{d\sigma}{ds} = \vartheta\,\frac{\sin\varphi}{a},$$

wo $\vartheta = \pm 1$, und kombinieren diese mit

$$\frac{d\lambda'}{ds} = \varepsilon l\,\frac{\sin\varphi}{a},$$

so wird

$$\frac{d\lambda'}{d\sigma} = \varepsilon\vartheta l.$$

Die Gleichung

$$\alpha l + \beta m + \gamma n = 0$$

ändert sich dann in

$$\alpha\,\frac{d\lambda'}{d\sigma} + \beta\,\frac{d\mu'}{d\sigma} + \gamma\,\frac{d\nu'}{d\sigma} = 0. \tag{27}$$

Aus (14) folgt nach Multiplikation mit α, β, γ durch Addition:

$$\alpha\lambda' + \beta\mu' + \gamma\nu' = \varepsilon\sin\varphi. \tag{28}$$

Aus (27) und (28) können wir, da außerdem

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

ist, α, β, γ berechnen. Da Quadrate auftreten, so haben wir wieder eine Größe $\theta = \pm 1$ einzuführen. Man erhält

$$\alpha = \varepsilon \lambda' \sin\varphi + \theta \cos\varphi \left(\mu' \frac{d\nu'}{d\sigma} - \nu' \frac{d\mu'}{d\sigma}\right)$$

und zwei entsprechende für β und γ.

Aus (14) erhalten wir dann auch λ, μ, ν. Diese Gleichungen ergeben, da

$$\Sigma \lambda'^2 = 1, \qquad \Sigma \left(\frac{d\lambda'}{d\sigma}\right)^2 = 1,$$

und wegen der Beziehung der 9 Richtungskosinus untereinander

$$\theta = -\vartheta,$$

wie man sich durch Ausrechnen leicht überzeugen kann.

Nun ist

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{dx}{ds} : \frac{d\sigma}{ds} = \alpha : \frac{d\sigma}{ds}.$$

Setzt man die Werte für α und $\frac{d\sigma}{ds}$ ein, so wird

$$\frac{dx}{d\sigma} = a \left[\varepsilon \vartheta \lambda' - \operatorname{cotg}\varphi \left(\mu' \frac{d\nu'}{d\sigma} - \nu' \frac{d\mu'}{d\sigma}\right)\right],$$

also

$$x = a \int \left[\varepsilon \vartheta \lambda' - \operatorname{cotg}\varphi \left(\mu' \frac{d\nu'}{d\sigma} - \nu' \frac{d\mu'}{d\sigma}\right)\right] d\sigma,$$

$$y = a \int \left[\varepsilon \vartheta \mu' - \operatorname{cotg}\varphi \left(\nu' \frac{d\lambda'}{d\sigma} - \lambda' \frac{d\nu'}{d\sigma}\right)\right] d\sigma,$$

$$z = a \int \left[\varepsilon \vartheta \nu' - \operatorname{cotg}\varphi \left(\lambda' \frac{d\mu'}{d\sigma} - \mu' \frac{d\lambda'}{d\sigma}\right)\right] d\sigma,$$

wo $\varepsilon \vartheta = \pm 1$. Dies sind die gesuchten endlichen Gleichungen der Bertrandschen Kurven.

Da die auftretenden Integrationskonstanten ohne Einfluß auf Form und Orientierung der Kurven sind, so folgt, daß zu einer gegebenen sphärischen Kurve als Indikatrix eine unendliche Anzahl Bertrandscher Kurven gehört, die durch den Wert der Konstanten φ charakterisiert sind (Rouquet a. a. O.).

Wir wollen die endlichen Gleichungen noch auf anderem Wege bestimmen, nämlich nach der Methode der parallelen Zuordnung,[1]) da sich dabei neue Resultate für die Bertrandschen Kurven ergeben und wir außerdem im zweiten und dritten Abschnitt noch auf diese Theorie zurückkommen werden.

Diese Methode besteht darin, daß man einer Kurve eine andere zuordnet, die mit ihr parallele Tangenten, Binormalen, rektifizierende Kanten oder Hauptnormalen hat. Wie durch einfache Überlegungen sofort klar ist, enthält der Fall der parallelen Hauptnormalen alle anderen als Spezialfälle. Wir entwickeln daher die Formeln nur für diesen Fall.

Nennen wir den Winkel, den zwei entsprechende Tangenten der aufeinander bezogenen Kurven miteinander bilden, ψ, so daß

$$\Sigma\, \alpha\, \alpha_1 = \cos\psi,$$

dann wird entsprechend den Formeln (8) und (14), die auch für parallele Hauptnormalen ihre Richtigkeit behalten,

$$(29) \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha\cos\psi - \lambda\sin\psi, \qquad \text{usw.} \\ \lambda_1 &= \varepsilon\,(\alpha\sin\psi + \lambda\cos\psi) \qquad \text{usw.} \end{aligned}$$

Zwischen den Richtungskosinus der Hauptnormalen besteht die Beziehung

$$l_1 = \varepsilon\, l, \qquad m_1 = \varepsilon\, m, \qquad n_1 = \varepsilon\, n.$$

Aus den Frenetschen Formeln folgt

$$\left(\frac{\alpha_1}{\rho_1} + \frac{\lambda_1}{r_1}\right) ds_1 = \varepsilon \left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{r}\right) ds, \qquad \text{usw.}$$

Diese mit α, β, γ multipliziert und addiert geben

$$\frac{\varepsilon\, ds}{\rho} = \left(\frac{\Sigma\alpha\alpha_1}{\rho_1} + \frac{\Sigma\alpha\lambda_1}{r_1}\right) ds_1,$$

mit λ, μ, ν multipliziert und addiert:

$$\frac{\varepsilon\, ds}{r} = \left(\frac{\Sigma\lambda\alpha_1}{\rho_1} + \frac{\Sigma\lambda\lambda_1}{r_1}\right) ds_1.$$

Durch vollkommen analoge Rechnung wie auf S. 11 erhält man ψ = konst.

[1]) Salkowski: Lit. 60, S. 64/69. Auch entwickelt bei Moschkowitsch, Lit. 75.

Aus den Formeln (29) folgt

$$\Sigma\,\alpha\,\alpha_1 = \cos\psi, \qquad \Sigma\,\alpha\,\lambda_1 = \varepsilon\sin\psi,$$
$$\Sigma\,\lambda\,\alpha_1 = -\sin\psi, \qquad \Sigma\,\lambda\,\lambda_1 = \varepsilon\cos\psi,$$

also

$$\frac{1}{\rho} = \left(\frac{\varepsilon\cos\psi}{\rho_1} + \frac{\sin\psi}{r_1}\right)\frac{ds_1}{ds}, \tag{30}$$
$$\frac{1}{r} = \left(-\frac{\varepsilon\sin\psi}{\rho_1} + \frac{\cos\psi}{r_1}\right)\frac{ds_1}{ds}.$$

Aus diesen Formeln kann man einen von Pirondini[1]) auf anderem Wege erhaltenen Satz ablesen. Sind nämlich die Bogenelemente beider Kurven gleich, so gilt

Satz 10: Entsprechen sich zwei Kurven doppelter Krümmung Punkt für Punkt so, daß die Bogenelemente in entsprechenden Punkten gleich und die Hauptnormalen parallel sind, so sind die Krümmung und Torsion jeder von ihnen eine lineare Funktion der Krümmung und Torsion der anderen. Hat also eine der Kurven konstante Krümmung oder konstante Torsion oder ist sie eine Schraubenlinie oder eine Bertrandsche Kurve, so ist die andere im allgemeinen eine Bertrandsche Kurve.

Aus den Formeln (29) erhält man

$$\alpha = \alpha_1\cos\psi + \varepsilon\lambda_1\sin\psi.$$

Die gesuchten endlichen Gleichungen sind daher

$$x = \int\alpha\,ds = \int(\alpha_1\cos\psi + \varepsilon\lambda_1\sin\psi)\frac{ds}{ds_1}\,ds_1,$$
$$y = \int\beta\,ds = \int(\beta_1\cos\psi + \varepsilon\mu_1\sin\psi)\frac{ds}{ds_1}\,ds_1, \tag{31}$$
$$z = \int\gamma\,ds = \int(\gamma_1\cos\psi + \varepsilon\nu_1\sin\psi)\frac{ds}{ds_1}\,ds_1.$$

Für uns kommt nur der Fall in Betracht, wo die Krümmungen durch eine Beziehung

$$f\left[\frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{r}\right] = 0$$

[1]) Lit. 43. Bianchi: Lit. 2, S. 32/34, leitet mit Hilfe dieses Satzes die endlichen Gleichungen aus denen der Kurven konstanter Krümmung ab.

verknüpft sind. Um die endlichen Gleichungen dieser Kurven zu erhalten, haben wir die Werte (30) in die Kurvengleichung einzutragen und den sich dabei für $\frac{ds}{ds_1}$ ergebenden Wert in (31) einzusetzen.

Anmerkung: Eine Ausnahme bilden die Schraubenlinien $\frac{\rho}{r} = \text{konst.}$, denn in diesem Falle fällt $\frac{ds}{ds_1}$ beim Einsetzen von (30) weg.

Ist $\psi = 0$, so sind beide Kurven durch parallele Tangenten aufeinander bezogen und die Gleichungen (31) werden

$$x = \int \frac{ds}{ds_1}\, dx_1, \quad y = \int \frac{ds}{ds_1}\, dy_1, \quad z = \int \frac{ds}{ds_1}\, dz_1.$$

Haben wir nun eine Bertrandsche Kurve

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1,$$

so ergibt sich

$$\frac{ds}{ds_1} = a\left[\frac{\varepsilon\cos\psi}{\rho_1} + \frac{\sin\psi}{r_1}\right] + b\left[\frac{\cos\psi}{r_1} - \frac{\varepsilon\sin\psi}{\rho_1}\right],$$

also ist

$$x = \int (\alpha_1\cos\psi + \varepsilon\lambda_1\sin\psi)\left\{a\left[\frac{\varepsilon\cos\psi}{\rho_1} + \frac{\sin\psi}{r_1}\right] + b\left[\frac{\cos\psi}{r_1} - \frac{\varepsilon\sin\psi}{\rho_1}\right]\right\} ds_1,$$

$$y = \int (\beta_1\cos\psi + \varepsilon\mu_1\sin\psi)\left\{a\left[\frac{\varepsilon\cos\psi}{\rho_1} + \frac{\sin\psi}{r_1}\right] + b\left[\frac{\cos\psi}{r_1} - \frac{\varepsilon\sin\psi}{\rho_1}\right]\right\} ds_1,$$

$$z = \int (\gamma_1\cos\psi + \varepsilon\nu_1\sin\psi)\left\{a\left[\frac{\varepsilon\cos\psi}{\rho_1} + \frac{\sin\psi}{r_1}\right] + b\left[\frac{\cos\psi}{r_1} - \frac{\varepsilon\sin\psi}{\rho_1}\right]\right\} ds_1.$$

Für $\psi = 0$ wird

$$x = a\varepsilon \int \frac{dx_1}{\rho_1} + b \int \frac{dx_1}{r_1},$$

$$y = a\varepsilon \int \frac{dy_1}{\rho_1} + b \int \frac{dy_1}{r_1},$$

$$z = a\varepsilon \int \frac{dz_1}{\rho_1} + b \int \frac{dz_1}{r_1}.$$

Hieraus folgt der von Salkowski[1]) gefundene

Satz 11: Teilt man die Verbindungslinien entsprechender Punkte zweier Kurven, die durch parallele Tangenten einander zugeordnet sind und von denen die eine konstante Krümmung, die andere konstante Torsion besitzt, in einem beliebigen konstanten Verhältnis, so bestimmen die Teilpunkte eine Bertrandsche Kurve.

Zum Schlusse sei noch auf eine Arbeit von Gräbner[2]) über algebraische Bertrandsche Kurven hingewiesen. Auf dem eingeschlagenen Wege ist es jedoch nicht gelungen, die Existenz reeller algebraischer Kurven nachzuweisen. Aus den aufgestellten Bedingungsgleichungen sind nur einige imaginäre erhalten.

§ 3.

Erzeugung von Bertrandschen Kurven und Anwendungen in der Kurventheorie.

Rouquet[3]) betrachtet die sphärische Indikatrix K irgend einer Kurve O und ihre Parallelkurven K_w, die mit ihr dieselben Normalebenen haben, und deren Radien den konstanten Winkel w mit denen von K bilden. Sind ξ_0, η_0, ζ_0 die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel mit dem Radius k, dann ist nach den Formeln der natürlichen Geometrie[4]) die Bedingung für die Unbeweglichkeit des Punktes:

[1]) Lit. 60, S. 68.
[2]) Lit. 65.
[3]) Lit. 42, S. 250.
[4]) Cesaro: Lit. 3, S. 157.

$$\frac{d\,\xi_o}{ds} = \frac{\eta_o}{\rho} - 1, \quad \frac{d\,\eta_o}{ds} = \frac{\zeta_o}{r} - \frac{\xi_o}{\rho},$$

$$\frac{d\,\zeta_o}{ds} = -\frac{\eta_o}{r}.$$

Die Parallelkurve ist gegeben durch die Gleichungen

$$\xi = \xi_o + k \cos w, \quad \eta = \eta_o, \quad \zeta = \zeta_o + k \sin w.$$

Die Fundamentalformeln der natürlichen Geometrie ergeben für die unendlich kleine Verrückung $\delta\,\xi$, $\delta\,\eta$, $\delta\,\zeta$ des Dreikants

$$\frac{\delta\,\xi}{ds} = 0; \quad \frac{\delta\,\eta}{ds} = k\left[\frac{\cos w}{\rho} - \frac{\sin w}{r}\right]; \quad \frac{\delta\,\zeta}{ds} = 0,$$

also, wenn $d\,\sigma_w$ das Bogenelement dieser Kurve ist,

$$d\,\sigma_w = k\,ds\left[\frac{\cos w}{\rho} - \frac{\sin w}{r}\right].$$

Soll daher eine der Parallelkurven mit der gegebenen Kurve im Bogen gleich sein, so ist notwendig und hinreichend, w so zu bestimmen, daß

$$k\left[\frac{\cos w}{\rho} - \frac{\sin w}{r}\right] = 1$$

für alle Punkte der Kurve O gilt, d. h. diese muß eine Bertrandsche Kurve sein. Ist umgekehrt eine Bertrandsche Kurve durch die Gleichung (10) gegeben, so wird diese im Bogen gleich sein einer Parallelkurve ihrer sphärischen Indikatrix, die auf der Kugel mit dem Radius $k = \frac{a}{\sin \varphi}$ gezogen ist, wobei die Parallelkurve durch den Winkel $w = \varphi - \frac{\pi}{2}$ bestimmt ist. Hieraus folgt der

Satz 12: Man erhält die allgemeine Bertrandsche Kurve, die durch die Gleichung (10) definiert ist, indem man auf einer Kugel vom Radius $\frac{a}{\sin \varphi}$ eine Kurve K nimmt und die Kurve sucht, die die doppelte Bedingung erfüllt: K als sphärische Indikatrix zuzulassen und im Bogen gleich dem der zur ersten parallelen sphärischen Kurve zu sein, wobei der konstante Winkel der Radien beider Kurven $\varphi - \frac{\pi}{2}$ ist.

Im Anschluß hieran kommt man durch folgende Überlegungen zu einer Konstruktion der Bertrandschen Kurven. Wir legen durch die Tangenten der Kurve $K_{\varphi - \frac{\pi}{2}}$ Ebenen parallel zu den Oskulationsebenen der Bertrandschen Kurve O, die also die Kugel mit dem Radius k unter dem konstanten Winkel φ schneiden und vom Mittelpunkt der Kugel den Abstand $a = k \sin \varphi$ haben. Die Enveloppe dieser Ebenen ist abwickelbar, ihre Rückkehrkurve sei S. Wickelt man diese Fläche und die Tangentenfläche der Kurve O in die Ebene ab unter Beibehaltung der Parallelität entsprechender Erzeugenden, so erhält man zwei ebene Kurven s und o mit parallelen Tangenten. Die sphärische Kurve geht bei der Abwicklung in eine ebene Kurve k über, die zu s orthogonal ist und deren Bogenelement mit dem von o übereinstimmt. Dreht man daher die Kurve k in ihrer Ebene um 90^0, so wird sie gleich der Kurve o. Das Ergebnis läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

Man nehme eine willkürliche sphärische Kurve auf einer Kugel mit dem Radius $\frac{a}{\sin \varphi}$ und wickle die Enveloppe der Ebenen durch die Tangenten dieser Kurve, die die Kugel unter dem konstanten Winkel φ schneiden, in die Ebene ab. Die Kurve, in die dabei die sphärische übergeht, drehe man um einen festen Punkt der Ebene um 90^0. Aus dieser gedrehten Kurve und ihren Tangenten kann man jetzt eine neue abwickelbare Fläche herstellen, deren Tangentialebenen parallel denen der ersten abwickelbaren sind. Die Wendekurve dieser Fläche ist die verlangte Bertrandsche Kurve.

Die Bertrandschen Kurven treten weiter in einer Arbeit von Salkowski[1]) auf bei Betrachtung von Kurvenpaaren, die sich unter konstantem Winkel schneiden.

Um das allgemeinste Kurvenpaar dieser Art zu bestimmen, ist zu beachten, daß man jede Regelfläche in die Hauptnormalenfläche einer Raumkurve verbiegen kann, wo bei der Biegung die Isogonalität erhalten bleibt.

---

[1]) Lit. 67.

Geht man daher von einer Kurve (x, y, z) aus, auf deren Hauptnormalenfläche eine sie isogonal kreuzende Orthogonaltrajektorie der Erzeugenden existiert,

$$x_1 = x + k\,l, \quad y_1 = y + k\,m, \quad z_1 = z + k\,n,$$

dann wird, da die Kurven ein Paar bilden sollen, also

$$\Sigma\,(x - x_1)\,\alpha = 0, \qquad \Sigma\,(x - x_1)\,\alpha_1 = 0$$

ist,

$$\alpha_1 = \frac{\alpha\left[1 - \frac{k}{\rho}\right] - \frac{k}{r}\,\lambda}{\sqrt{\left[1 - \frac{k}{\rho}\right]^2 + \frac{k^2}{r^2}}}.$$

Die Kurven sollen zueinander isogonal sein, also muß

$$\Sigma\,\alpha\,\alpha_1 = \cos\alpha = \text{konst.}$$

sein, d. h.

$$\frac{1 - \frac{k}{\rho}}{\sqrt{\left[1 - \frac{k}{\rho}\right]^2 + \frac{k^2}{r^2}}} = \cos\varphi.$$

Wie auf Seite 11 ff. erhält man die Beziehung zwischen den Krümmungen

$$\frac{\sin\varphi}{\rho} + \frac{\cos\varphi}{r} = \frac{\sin\varphi}{k},$$

wo k = konst., es gilt also

Satz 13: Man erhält das allgemeinste isogonale Kurvenpaar, wenn man die Hauptnormalenfläche einer beliebigen Bertrandschen Kurve willkürlich verbiegt. Das zugeordnete Paar geht dabei in das gesuchte Kurvenpaar über. Haben die Bertrandschen Kurven konstante Krümmung, so wird das Kurvenpaar orthogonal.

Schließlich sei noch eine Anwendung erwähnt, die Schell[1]) macht, indem er aus den Eigenschaften der Bertrandschen Kurven zu einer gegebenen Kurve konstanter Torsion eine unendliche Mannigfaltigkeit solcher Kurven ableitet.

---

[1]) Lit. 57.

§ 4.

Die rektifizierende Fläche der Bertrandschen Kurven.

Die rektifizierende Fläche der Kurven mit linearer Beziehung zwischen den Krümmungen ist bisher außer von Salkowski noch nicht untersucht worden.

Aus allgemeinen Betrachtungen über die zweite rektifizierende Fläche einer Raumkurve, d. h. über die rektifizierende Fläche der rektifizierenden Gratlinie erhält er den

Satz:[1]) Die rektifizierenden Gratlinien zweier zugeordneten Bertrandscher Kurven sind parallel und besitzen dieselbe rektifizierende Fläche.

Wir wollen den Satz hier direkt auf analytischem Wege ableiten:

Zwei Kurven sind parallel heißt, ihre Tangenten haben gleiche Richtungskosinus. Wie früher seien die Größen der zugeordneten Kurve C′ mit gestrichenen Buchstaben, die der rektifizierenden Gratlinie mit dem Index 1 bezeichnet. Die Richtung der Tangente der rektifizierenden Gratlinie ist

$$\alpha_1 = \alpha \cos H + \lambda \sin H \quad \text{usw.}$$

bezw.

$$\alpha_1' = \alpha' \cos H' + \lambda' \sin H' \quad \text{usw.,}$$

wo $\operatorname{tg} H = -\frac{r}{\rho}, \qquad \operatorname{tg} H' = -\frac{r'}{\rho'}.$

Aus der Kurvengleichung (10) folgt

$$r = \frac{a\,\rho \operatorname{cotg} \varphi}{\rho - a}.$$

Dies eingesetzt erhalten wir:

$$\cos H = -\frac{\rho - a}{\sqrt{\rho^2 - 2a\rho + \frac{a^2}{\sin^2 \varphi}}},$$

$$\sin H = -\frac{a \operatorname{cotg} \varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2a\rho + \frac{a^2}{\sin^2 \varphi}}},$$

[1]) Lit. 64.

also

$$\alpha_1 = \frac{\alpha(\rho - a) - \lambda a \operatorname{cotg}\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2a\rho + \frac{a^2}{\sin^2\varphi}}}.$$

Für H′ erhält man unter Berücksichtigung der Formeln (22):

$$\cos H' = \frac{\varepsilon \rho \cos\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2a\rho + \frac{a^2}{\sin^2\varphi}}},$$

$$\sin H' = -\frac{\frac{a}{\sin\varphi} - \rho \sin\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2a\rho + \frac{a^2}{\sin^2\varphi}}}.$$

Diese Werte und die Formeln (8) und (14) liefern:

$$\alpha_1' = \varepsilon \frac{\alpha(\rho - a) - \lambda a \operatorname{cotg}\varphi}{\sqrt{\rho^2 - 2a\rho + \frac{a^2}{\sin^2\varphi}}},$$

also ist

$$\alpha_1' = \varepsilon \alpha_1.$$

Da nun das Verhältnis der Bertrandschen Kurven, ebenso auch das ihrer rektifizierenden Gratlinien völlig reziprok ist, so folgt, daß die rektifizierenden Flächen beider Gratlinien zusammenfallen.

Von diesem Satze ausgehend untersucht Salkowski in einer anderen Arbeit[1]) die Fälle, in denen die zweite rektifizierende Fläche einer Bertrandschen Kurve ein Zylinder oder ein Kegel ist.

Wir betrachten zunächst den ersten Fall:

Sind C und C′ die zugeordneten Bertrandschen Kurven und ist die rektifizierende Gratlinie R der Kurve C eine Schraubenlinie, so ist, nach dem eben bewiesenen Satze, die von C′ : R′ eine zu R parallele und daher kongruente Schraubenlinie desselben Zylinders (Fig. 2). Auf der rektifizierenden Fläche von C können wir eine zu C′ kongruente parallele geodätische Linie R″ zeichnen, so daß für die Verbindungslinie entsprechender Punkte gilt

$$RR' \parallel R''C'.$$

[1]) Lit. 68.

Bezeichnet man den konstanten Winkel, unter dem die Schraubenlinien die Erzeugenden ihres Zylinders schneiden mit ψ, der also in der Figur dargestellt wird durch $\sphericalangle C_1 R_1'' C_1' = \sphericalangle C_1 R_1 R_1'$, so erhält man aus dem bei C_1 rechtwinkligen Dreieck

$$C_1 R_1'' = a \operatorname{cotg} \psi.$$

Bei der Abwickelung der rektifizierenden Fläche von C geht diese Kurve und R'' in zwei gerade Linien $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{R}''$ über, die sich wegen der Parallelität der Kurven C' und R'' unter dem Winkel φ schneiden. Die rektifizierende Gratlinie R wird zu einer ebenen Kurve $\mathfrak{R}$, die die Enveloppe der Verbindungslinien entsprechender Punkte von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{R}''$ ist. Da diese Verbindungsgeraden die konstante Länge a cotg ψ haben, so ist die Kurve $\mathfrak{R}$ eine schiefe Astroide.

Für $\varphi = 90^0$ geht die schiefe Astroide in eine reguläre über, die Bertrandschen Kurven werden Kurven konstanter Krümmung. Ist $\varphi = 0$, so hat man eine Raumkurve konstanter Torsion.

Diese Betrachtungen können wir in dem Satz zusammenfassen:

Betrachtet man die Ebene einer schiefen Astroide als ihre Tangentenfläche und tordiert sie so, daß die Astroide in eine Schraubenlinie übergeht, so werden ihre Achsen Bertrandsche Kurven, von denen jede durch Parallelverschiebung in die zugeordnete der anderen übergeht. Wird die schiefe Astroide zur regulären, so erhält man Kurven konstanter Krümmung, fallen ihre Achsen zusammen, so ergibt sich eine Kurve konstanter Torsion.

Ist die Astroide eine Parastroide, so sind die Kurven imaginär.

Die Kurven konstanter Torsion stellen also den Übergang von reellen zu imaginären Bertrandschen Kurven dar, weshalb sie Salkowski mit zu dieser Kurvenart gezählt wissen will,[1]) abgesehen von den anderen Eigenschaften, die sie mit diesen gemein haben.

Die Bogenlänge der betrachteten Kurve erhält man sofort aus Figur 3, in der der Winkel $O\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{R}''$ der Supplementwinkel

[1]) Vgl. die Anmerkung S. 14.

des Winkels H der rektifizierenden Kante gegen die Tangente ist

$$s = \frac{a \operatorname{cotg} \varphi}{\sin \varphi} \sin (H - \varphi),$$

oder wenn wir H eliminieren durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} H = -\frac{r}{\rho},$$

so wird

$$s = -\frac{a \operatorname{cotg} \psi}{\sin \varphi} \frac{(\rho \sin \varphi + r \cos \varphi)}{\sqrt{\rho^2 + r^2}}.$$

Ist die zweite rektifizierende Fläche der Bertrandschen Kurven ein Kegel, so lassen die Resultate, wenn keine der Kurven geodätische des Kegels ist, nur für die Kurven konstanter Krümmung eine einfache geometrische Deutung zu. Wir verzichten daher hier auf diesen Fall und beschränken uns darauf, daß eine der Kurven geodätische des Kegels ist, d. h. ihre rektifizierende Gratlinie sich auf einen Punkt reduziert.

Angenommen, dies treffe für die zweite Kurve C′ zu (Figur 4), ihre rektifizierende Gratlinie sei der Punkt R′. Die zweite rektifizierende Fläche der Kurve C geht dann durch diesen Punkt und da die Ebenen $C_1 C_1' R_1$ zu den Ebenen $C_1' C_2' R'$ senkrecht stehen, so ist die rektifizierende Gratlinie R von C geodätische Linie eines Kegels, dessen Tangentialebenen zu den entsprechenden des rektifizierenden Kegels von C′ senkrecht sind. Wir können also den Satz aussprechen:

Die zugeordnete zu einer Bertrandschen Kurve, die auf einem Kegel geodätische ist, besitzt als zweite rektifizierende Fläche einen Kegel, dessen Spitze mit dem ersten zusammenfällt und dessen Berührungsebenen auf den entsprechenden des ersten Kegels senkrecht stehen.

§ 5.

Die Bertrandschen Kurven in der Flächentheorie.

Wir wollen zunächst auf eine Untersuchung Pirondinis[1]) eingehen, die nicht im eigentlichen Sinne zur Flächentheorie ge-

[1]) Lit. 37; auch Cesaro: Lit. 48 und Lit. 3, S. 188.

hört, die wir aber hier bringen, weil sich an sie allgemeine Untersuchungen über Regelflächen, die mit den Bertrandschen Kurven im Zusammenhange stehen, anschließen.

Pirondini geht von der Frage aus, ob eine mit dem Fundamentaldreikant einer Kurve fest verbundene Gerade g bei der Schraubung des Dreikants, die es in die unendlich benachbarte Lage überführt, normal zu den Trajektorien ihrer Punkte bleiben kann.

Wir wollen die Untersuchung auf dem gewöhnlichen analytischen Wege durchführen:

Sind x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Kurve und hat ein Punkt der Geraden im Dreikant die Koordinaten ξ_o, η_o, ζ_o, in dem im Raume festen Achsenkreuz X, Y, Z und sind die Richtungskosinus der Geraden im Dreikant a_o, b_o, c_o, so sind die im Raume

$$\begin{aligned} A &= a_o\,\alpha + b_o\,l + c_o\,\lambda, \\ B &= a_o\,\beta + b_o\,m + c_o\,\mu, \\ C &= a_o\,\gamma + b_o\,n + c_o\,\nu. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} X &= x + \alpha\,\xi_o + l\,\eta_o + \lambda\,\zeta_o, \\ Y &= y + \beta\,\xi_o + m\,\eta_o + \mu\,\zeta_o, \\ Z &= z + \gamma\,\xi_o + n\,\eta_o + \nu\,\zeta_o, \end{aligned}$$

und die Ableitungen nach der Bogenlänge der Kurve sind:

$$\frac{dX}{ds} = \alpha\left(1 - \frac{\eta_o}{\rho}\right) + l\left(\frac{\xi_o}{\rho} + \frac{\zeta_o}{r}\right) - \lambda\,\frac{\eta_o}{r}$$

usw.

Bei der Bewegung des Dreikants beschreibt der Punkt (ξ_o, η_o, ζ_o) eine Raumkurve, deren Bogen mit σ bezeichnet sei. Dann ist

$$\frac{d\sigma}{ds} = \sqrt{\left(1 - \frac{\eta_o}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\xi_o}{\rho} + \frac{\zeta_o}{r}\right)^2 + \left(\frac{\eta_o}{r}\right)^2}.$$

Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Richtungskosinus der Tangente dieser Kurve, so ist

$$\frac{dX}{d\sigma} = a_1 = \frac{\alpha\left(1 - \frac{\eta_o}{\rho}\right) + l\left(\frac{\xi_o}{\rho} + \frac{\zeta_o}{r}\right) - \lambda\,\frac{\eta_o}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\eta_o}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\xi_o}{\rho} + \frac{\zeta_o}{r}\right)^2 + \left(\frac{\eta_o}{r}\right)^2}}.$$

Die Gerade soll orthogonal zu den Trajektorien ihrer Punkte bleiben, heißt

$$\Sigma\, A\, \alpha_1 = 0.$$

Ausgerechnet gibt dies

$$a_0 \left(1 - \frac{\eta_0}{\rho}\right) + b_0 \left(\frac{\xi_0}{\rho} + \frac{\zeta_0}{r}\right) - \frac{c_0\, \eta_0}{r} = 0,$$

oder

$$\frac{a_0\, \eta_0 - b_0\, \xi_0}{\rho} + \frac{c_0\, \eta_0 - b_0\, \zeta_0}{r} = a_0.$$

Führen wir als Koordinaten die Größen

$$\begin{aligned} -\mathfrak{x} &= b_0\, \zeta_0 - c_0\, \eta_0, \\ -\mathfrak{y} &= c_0\, \xi_0 - a_0\, \zeta_0, \\ -\mathfrak{z} &= a_0\, \eta_0 - b_0\, \xi_0 \end{aligned}$$

ein, die von der Lage des Punktes ξ_0, η_0, ζ_0 auf der Geraden unabhängig sind, so wird die Bedingungsgleichung

$$\frac{\mathfrak{z}}{\rho} - \frac{\mathfrak{x}}{r} = a_0.$$

Soll also zwischen den Krümmungen der Kurve C eine lineare Beziehung bestehen, so erhält man nach (11):

$$\mathfrak{z} = a\, a_0, \qquad \mathfrak{x} = -b\, a_0.$$

Die erste dieser Gleichungen stellt die Geraden dar, die sich auf eine Gerade D stützen, die durch C parallel zu den Binormalen von C′ gezogen ist.

Die zweite der Gleichungen wird, da $a_0 = \frac{\mathfrak{z}}{a}$:

$$a\, \mathfrak{x} + b\, \mathfrak{z} = 0.$$

Sie stellt die Geraden dar, die sich auf eine Gerade D′ stützen, die durch C′ parallel zu den Binormalen von C gezogen ist.

Wir haben so die charakteristische Eigenschaft der Bertrandschen Kurven:

Jede Gerade g, die mit den starr verbundenen Dreikanten eines Bertrandschen Kurvenpaares fest verbunden ist und sich auf zwei Gerade D und D′ stützt, die durch die Punkte jeder der beiden Kurven bezw. parallel zu den Binormalen der anderen Kurve gezogen sind, bleibt bei der Verrückung der Dreikante normal zu den Trajektorien ihrer Punkte.

Bei Kurven konstanter Krümmung stehen beide Geraden aufeinander senkrecht, und zwar sind es die Geraden, die sich auf die Tangente und die Polargerade stützen.

Hat die Kurve konstante Torsion, so fallen die Geraden mit der Binormalen zusammen.

Von diesen Untersuchungen ausgehend stellt sich Rouquet[1]) die Aufgabe, die von der Geraden g erzeugte Regelfläche zu untersuchen.

Die Gerade g schneide die Leitlinien D und D′ in G und G′. Ist der Abstand des Punktes G (o, a, z_o) vom Punkte C der Kurve u, so sind die Gleichungen der Geraden

$$x = a_o\, u, \qquad y = a + b_o\, u, \qquad z = z_o + c_o\, u.$$

Die Koordinaten des Punktes G′ sind

$$u = -\frac{a}{b_o}, \qquad -\frac{a_o}{b_o}\, a, \quad o, \quad z_o - \frac{c_o}{b_o}\, a.$$

Da dieser Punkt auf D′ liegt, so muß noch gelten

$$x \cos \varphi + z \sin \varphi = 0,$$

oder diese Bedingung wird mit den Koordinaten

$$c_o = \frac{b_o}{a}\, z_o - a_o \operatorname{cotg} \varphi.$$

Für das Linienelement der Fläche erhält man

$$d S^2 = du^2 + (L_o\, u^2 - 2\, M_o\, u + N_o)\, ds^2,$$

wo

$$L_o = \frac{b_o^2}{\rho^2} + \left(\frac{a_o}{\rho} - \frac{c_o}{r}\right)^2 + \frac{b_o^2}{r^2},$$

$$M_o = \frac{b_o}{\rho}\left(1 - \frac{a}{\rho}\right) + \frac{z_o}{r}\left(\frac{a_o}{\rho} - \frac{c_o}{r}\right) - \frac{b_o\, a}{r^2},$$

$$N_o = \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \frac{z_o^2}{r^2} + \frac{a^2}{r^2}.$$

Eliminiert man ρ durch die Bertrandsche Relation und setzt den oben erhaltenen Wert für c_o ein, so wird

[1]) Lit. 49 und Lit. 59.

$$L_o = \frac{1}{A\,a^2}\left[\left(\frac{A\,a\,b_o}{r} - B\right)^2 + 1\right],$$

$$M_o = -\frac{1}{r}\left(\frac{A\,a\,b_o}{r} - B\right),$$

$$N_o = \frac{A\,a^2}{r^2},$$

wo

$$A = \frac{1}{\sin^2\varphi} + \frac{z_o^2}{a^2}, \qquad B = b_o \operatorname{cotg}\varphi + \frac{a_o\,z_o}{a}.$$

Dann ist

$$dS^2 = du^2 + L_o\,ds^2\,[(u - u_o)^2 + p^2],$$

wo

$$u_o = \frac{M_o}{L_o}, \qquad p = \frac{1}{L_o\,r} = \frac{\sqrt{L_o\,N_o - M_o^2}}{L_o}.$$

Vergleicht man diesen Wert mit dem bei Darboux,[1]) so sieht man:

u_o ist der Abstand des Punktes G vom Zentralpunkt der Erzeugenden und die Gleichung $u_o = \frac{M_o}{L_o}$ ist die der Striktionslinie der Fläche.

p ist der Verteilungsparameter.

Nach einem Satze von Bour[2]) kann man eine Regelfläche stets so verbiegen, daß sie in die Hauptnormalenfläche irgend einer ihrer Orthogonaltrajektorien übergeht. Sollen die Erzeugenden zu gleicher Zeit Hauptnormalen zweier Kurven sein, so muß zwischen dem Windungs- und Verteilungsparameter die Beziehung

$$(u_o - m)^2 + (p - n)^2 = q^2$$

bestehen, wo m, n, q willkürliche Konstante sind.

Eliminiert man aus den oben erhaltenen Werten für u_o und p die Torsion, so erhält man

$$\left(u_o + \frac{a}{2\,b_o}\right)^2 + \left(p + \frac{a\,B}{2\,b_o}\right)^2 = \frac{a^2}{4\,b_o^2}\left(B^2 + 1\right).$$

Wir haben also zwischen den beiden Parametern die gleiche Beziehung wie bei Bour.

[1]) Leçons III, S. 305.

[2]) Lit. 18.

Berechnet man aus der Gleichung u_o und nennt man die beiden Werte u_{o_1} und u_{o_2}, so ist

$$u_{o_1} + u_{o_2} = -\frac{a}{b_o},$$

$$u_{o_1} \cdot u_{o_2} = 0,$$

d. h. einer der Werte ist Null. Ist z. B. $u_{o_1} = 0$, so ist eine der Trajektorien, die sich in Bertrandsche Kurven transformieren, die vom Punkte G beschriebene Kurve, da $u_{o_2} = -\frac{a}{b_o}$, so muß die andere Trajektorie der Ort der Punkte G′ werden.

Wir haben also den Satz:

Die von g erzeugte Fläche kann unter Beibehaltung ihrer Geraden in die Hauptnormalenfläche zweier Bertrandschen Kurven verbogen werden, die bei der Verbiegung aus den Trajektorien der Punkte G und G′ hervorgehen, in denen g die Geraden D und D′ trifft.

Für die Theorie der Bertrandschen Kurven sind noch von Bedeutung zwei mit den Dreikanten der konjugierten Kurven verbundene hyperbolische Paraboloide, die man bei der Frage erhält, wann eine mit dem Dreikant einer Kurve fest verbundene Gerade eine abwickelbare Fläche erzeugt.[1])

Zu den Kurven, auf die man kommt, wenn außer den Parallelen zur Tangente in der rektifizierenden Ebene anderen Geraden diese Eigenschaft zukommen soll, gehören auch die Bertrandschen Kurven. Bei ihnen sind es außerdem gewisse in der zur rektifizierenden Ebene parallelen $\eta = a$ liegende Geraden und weiterhin zur Oskulationsebene bezw. zur Ebene $a\xi + b\zeta = 0$ parallele Geraden, die je ein hyperbolisches Paraboloid erfüllen. Was die Ableitung dieser Theorie betrifft, so verweise ich auf den zweiten Abschnitt S. 66 ff.

Bei Kurven konstanter Krümmung werden die Paraboloide zu Parabeln, von denen die eine in der Oskulationsebene liegt mit dem Scheitel auf der Kurve, dem Brennpunkt im Krümmungsmittelpunkt, während die andere in der Normalebene mit dem Scheitel im Krümmungsmittelpunkt und dem Brennpunkte auf der Kurve liegt.

[1]) Cesaro: Lit. 41 und Lit. 3, S. 191; s. a. Salkowski: Lit. 68, S. 572.

Hat die Kurve konstante Torsion, so fallen beide Paraboloide zusammen.

Die Erzeugenden der einen Schar der Paraboloide bleiben beständig tangential zu gewissen Kurven des Raumes, die von Darboux[1]) untersucht sind. Er stellt die Frage nach zwei Kurven, die sich punktweise so entsprechen, daß die Tangenten in entsprechenden Punkten und die Gerade, die diese Punkte verbindet, ein festes System bilden. Sind die Kurven nicht normal zur verbindenden Geraden, so sind sie die Biegungskurven zweier Parallelkreise eines durch die Gerade erzeugten Rotationshyperboloids. Sind sie Orthogonaltrajektorien der erzeugten Regelfläche, so erhält man sie durch beliebige Verbiegung der Hauptnormalenfläche zweier Bertrandscher Kurven.

An dieser Stelle wollen wir noch einige Untersuchungen über die Deformationskurven des Rotationshyperboloids nachholen, die eine gewisse Berühmtheit erlangt haben, wegen der Anwendung, die hier die Bertrandschen Kurven in der Flächentheorie finden.

Laguerre veröffentlichte 1871 eine Arbeit[2]), in der er den Satz bewies:

Verbiegt man ein Rotationshyperboloid auf irgend eine Art so, daß die Erzeugenden gradlinig bleiben, so geht der Kehlkreis in eine Bertrandsche Kurve über.

Bezeichnet man nämlich den Bogen der Striktionslinie einer Regelfläche mit σ, den Winkel der Erzeugenden der Fläche gegen die Tangente der Striktionslinie mit w, den Winkel zweier benachbarter Erzeugenden mit $d\tau$ und den Winkel der Hauptnormalen der Striktionslinie gegen die Normale zur Erzeugenden in der Tangentialebene der Fläche mit θ und setzt zur Abkürzung

$$\frac{d\tau}{d\sigma} = \frac{\sin w}{k},$$

dann ist

$$\frac{dw}{d\sigma} + \frac{\sin\theta}{\rho} = 0,$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{tg} w} \cdot \frac{1}{\rho},$$

wenn $\frac{1}{\rho}$ und $\frac{1}{r}$ die Krümmungen der Striktionslinie sind.

[1]) Lit. 63.
[2]) Lit. 19.

Ist die Fläche ein Rotationshyperboloid, so sind w und k konstant, also gibt die erste Gleichung, da für $\frac{1}{\rho} = 0$ die Striktionslinie eine Gerade wäre:

$$\sin \theta = 0.$$

Dann wird die zweite Gleichung

$$\frac{\operatorname{cotg} w}{\rho} - \frac{1}{r} = \frac{1}{k}.$$

Damit ist der Satz bewiesen, denn bei einer Verbiegung der Fläche, bei der die Geraden gradlinig bleiben, sind θ, ρ und r durch die obigen Gleichungen verbunden, während σ, w und k ihren Wert behalten.

Geht man von der letzten Gleichung aus, so definieren w und k ein Rotationshyperboloid, dessen Kehlkreis den Radius k cotg w hat, der bei beliebiger Verbiegung des Hyperboloids in die durch diese Gleichung bestimmte Bertrandsche Kurve übergeht.

Die Umkehrung des Laguerreschen Satzes wurde streng bewiesen durch Untersuchungen von Astor, Pellet und Bioche[1]). Zur Ableitung ihrer Resultate gehen wir am einfachsten von einer anderen Arbeit von Bioche[2]) aus, in der er die Flächen bestimmt, die durch eine mit einer Kurve fest verbundene Gerade erzeugt werden und längs der Kurve konstante Krümmung haben.

Seine auf anderem Wege erhaltenen Ergebnisse wollen wir hier nach der gewöhnlichen analytischen Methode herleiten:

Sind a_0, b_0, c_0 die Richtungskosinus der Geraden im Dreikant der Kurve

$$x = f_1(s), \qquad y = f_2(s), \qquad z = f_3(s),$$

so sind sie in dem im Raume festen System

$$\mathfrak{A} = a_0 \alpha + b_0 \lambda + c_0 \lambda,$$
$$\mathfrak{B} = a_0 \beta + b_0 m + c_0 \mu,$$
$$\mathfrak{C} = a_0 \gamma + b_0 n + c_0 \nu.$$

Die Gleichungen der von der Geraden erzeugten Fläche sind dann

[1]) Astor: Assoc. Franç. pour l'avanc. des sciences, 1887 II, S. 1. Pellet: Lit. 35. Bioche: Lit. 36.

[2]) Lit. 40 und Lit. 44.

$$X = x + u\,\mathfrak{A},$$
$$Y = y + u\,\mathfrak{B},$$
$$Z = z + u\,\mathfrak{C},$$

wo u die Veränderliche auf den Erzeugenden ist.

Die Fundamentalgrößen der Fläche längs der Kurve ($u = 0$) sind

$$E = 1, \quad F = a_0, \quad G = 1, \quad D = \sqrt{b_0^2 + c_0^2},$$

$$L = -\frac{c_0}{\rho\sqrt{b_0^2 + c_0^2}}, \quad M = \frac{-\frac{a_0 c_0}{\rho} - \frac{b_0^2 + c_0^2}{r}}{\sqrt{b_0^2 + c_0^2}}, \quad N = 0.$$

Daraus erhält man für die Krümmung

$$K = -\frac{\left(\frac{a_0 c_0}{\rho} + \frac{b_0^2 + c_0^2}{r}\right)^2}{(b_0^2 + c_0^2)^2}.$$

Soll diese konstant sein $= -k^2$, so sind also die Krümmungen der Kurve durch die lineare Gleichung

$$\frac{a_0 c_0}{k(b_0^2 + c_0^2)\rho} - \frac{1}{k r} = 1$$

verknüpft, d. h. die Kurve muß eine Bertrandsche sein.

Vergleicht man diese Beziehung mit der Gleichung der allgemeinen Bertrandschen Kurven

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1,$$

so hat man für die Koeffizienten

$$\varepsilon a = \frac{a_0 c_0}{k(b_0^2 + c_0^2)}, \qquad \varepsilon b = \frac{1}{k},$$

wo ε ein Proportionalitätsfaktor ist. Durch Kombination beider Werte ergibt sich

$$a(b_0^2 + c_0^2) - a_0 c_0 b = 0.$$

Diese Gleichung sagt uns, daß die Geraden, die durch einen Punkt der Kurve gehen, einen Kegel bilden, dessen Gleichung geschrieben werden kann in der Form

$$a(\eta^2 + \zeta^2) - \xi\,\zeta\,b = 0.$$

Dieser Kegel hat die Spitze im Koordinatenanfang, er berührt die Oskulationsebene in der Tangente und schneidet die rektifizierende Ebene in den Geraden

$$\zeta = 0, \qquad \frac{\xi}{a} = \frac{\zeta}{b}.$$

Betrachten wir speziell die zweite dieser Geraden, so hat sie im festen Koordinatensystem die Richtungskosinus

$$\mathfrak{A}_o = a_o\,\alpha + c_o\,\lambda,$$
$$\mathfrak{B}_o = a_o\,\beta + c_o\,\mu,$$
$$\mathfrak{C}_o = a_o\,\gamma + c_o\,\nu.$$

Bestimmt man den Abstand u_o der Striktionslinie der von ihr erzeugten Fläche von der Ausgangskurve nach der Formel:

$$u_o = -\frac{\Sigma \frac{dx}{ds}\,\frac{d\,\mathfrak{A}_o}{ds}}{\Sigma \left(\frac{d\,\mathfrak{A}_o}{ds}\right)^2},$$

so erhält man $u_o = 0$, d. h. die Kurve selbst ist die Striktionslinie der Fläche. Da der absolute Betrag der Krümmung einer windschiefen Regelfläche längs der Striktionslinie das Inverse des Quadrates des Verteilungsparameters ist[1]), so wird dieser hier

$$\frac{c_o}{\frac{a_o}{\rho} + \frac{c_o}{r}} = \text{konst.}$$

Die Regelflächen, deren Erzeugenden die Striktionslinie unter konstantem Winkel schneiden und deren Verteilungsparameter gleich sind, sind aufeinander abwickelbar, also ist die von der Geraden erzeugte Fläche auf das Rotationshyperboloid abwickelbar. Führt man für die Konstante b ihren Wert a cotg φ ein, so erhält man

$$a_o \cos\varphi - c_o \sin\varphi = 0,$$

d. h. die Gerade ist parallel zur Binormalen der zugeordneten Kurve. Wir haben daher den von Bioche[2]) gefundenen Satz:

Ist eine Bertrandsche Kurve gegeben, so erhält man die Fläche, die diese Kurve als Striktionslinie besitzt, indem man durch jeden ihrer Punkte eine Parallele zur Binormalen der zugeordneten Kurve zieht. Die Gleichungen dieser Flächen sind daher:

$$X = x + u\,\lambda', \qquad Y = y + u\,\mu', \qquad Z = z + u\,\nu',$$

[1]) Cesaro: Lit. 3, S. 225.
[2]) Lit. 36.

wo für x, y, z die im § 2 gefundenen endlichen Gleichungen der Bertrandschen Kurven einzusetzen sind.

Diese Flächen treten auch bei den auf S. 33 ff. betrachteten Bertrandschen Kurven auf, deren zweite rektifizierende Fläche ein Zylinder ist. Der dort gefundene Satz läßt sich auch folgendermaßen aussprechen:

Rollt die Ebene einer schiefen Astroide, ohne zu gleiten, auf einer Böschungsfläche so ab, daß die Astroide punktweise mit der Gratlinie dieser Fläche zusammenfällt, so beschreiben die Schnittpunkte C, R″ der Tangenten mit den Achsen zwei Bertrandsche Kurven, von denen jede durch passende Parallelverschiebung in die zugeordnete der anderen übergeht.

Die Ebene C O R″ (Fig. 5) ist die rektifizierende Ebene der Kurven C und R″. Die Senkrechten zu den Tangenten O C und O R″ sind also die Binormalen der Kurven C und R″, d. h. die Höhen C D und R″ S des Dreiecks O C R″ sind parallel zu den Binormalen der Kurven R″ bezw. C. Läßt man also die Ebene der Astroide wie oben beschrieben über die Böschungsfläche abrollen, so beschreiben diese Geraden C D und R″ S zwei Biegungsflächen des Rotationshyperboloids.

Diese Flächen sind weiter untersucht worden von Mohr[1]), der beweist, daß sie die Brennflächen eines Normalensystems sind. Wir stellen uns allgemein die Aufgabe, die Kurven zu bestimmen, bei denen die eine Schar der Erzeugenden eines mit dem Dreikant fest verbundenen einschaligen Hyperboloids ein Normalensystem bildet.

Die Kurve sei dargestellt durch die Gleichungen

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad z = f_3(t),$$

das Hyperboloid durch die eine Achse a der Kehlellipse, die beiden senkrechten Erzeugenden in den Endpunkten, die miteinander den Winkel ϑ bilden, und durch die auf ihnen bestehende projektive Beziehung

$$k = u \cdot w,$$

wo u und w die Veränderlichen auf den Erzeugenden sind und k eine Konstante.

[1]) Lit. 72.

In bezug auf ein im Raume festes Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt in die Mitte von a, dessen X-Achse mit a und dessen Z-Achse mit der Halbierungslinie des Winkels ϑ zusammenfällt, sind die Gleichungen des Hyperboloids

$$\xi = -\frac{a}{2} + \varepsilon v a,$$

$$\eta = \sin\frac{\vartheta}{2}\,[u - \varepsilon v (w + u)],$$

$$\zeta = \cos\frac{\vartheta}{2}\,[u + \varepsilon v (w - u)],$$

wo ε ein Proportionalitätsfaktor ist. Eliminiert man u, w und v, so erhält man die Gleichung des Hyperboloids in der Form:

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{\eta^2}{k \sin^2\frac{\vartheta}{2}} + \frac{\zeta^2}{k \cos^2\frac{\vartheta}{2}} = 1.$$

Haben im Dreikant die Erzeugenden die Richtungskosinus α_o, β_o, γ_o bzw. α_1, β_1, γ_1 und sind die der kürzesten Verbindungslinie χ, ψ, ω, dann sind die Gleichungen der Erzeugenden

$$x_1 = a_1 + u\,\alpha_o, \qquad x_2 = a_1 + a\,\chi + \omega\,\alpha_1,$$
$$y_1 = b_1 + u\,\beta_o, \qquad y_2 = b_1 + a\,\psi + \omega\,\beta_1,$$
$$z_1 = c_1 + u\,\gamma_o, \qquad z_2 = c_1 + a\,\omega + \omega\,\gamma_1.$$

Die Gleichungen des Hyperboloids lauten in diesem System

$$\xi = x_1 + v f, \qquad \eta = y_1 + v g, \qquad \zeta = z_1 + v h,$$

wo

$$f = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{\Sigma (x_2 - x_1)^2}}, \qquad g = \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{\Sigma (x_2 - x_1)^2}},$$

$$h = \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{\Sigma (x_2 - x_1)^2}}.$$

In dem im Raume festen Koordinatensystem sind seine Gleichungen dann:

$$X = x + \alpha\,\xi + l\,\eta + \lambda\,\zeta,$$
$$Y = y + \beta\,\xi + m\,\eta + \mu\,\zeta,$$
$$Z = z + \gamma\,\xi + n\,\eta + \nu\,\zeta.$$

Setzt man hierin

$$\Phi = \alpha f + l g + \lambda h,$$
$$\Psi = \beta f + m g + \mu h,$$
$$\Omega = \gamma f + n g + \nu h$$

und

$$\begin{aligned} \xi &= x + \alpha x_1 + l y_1 + \lambda z_1, \\ \eta &= y + \beta x_1 + m y_1 + \mu z_1, \\ \zeta &= z + \gamma x_1 + n y_1 + \nu z_1, \end{aligned}$$

so werden diese

$$\begin{aligned} X &= \xi + v \Phi, \\ Y &= \eta + v \Psi, \\ Z &= \zeta + v \Omega. \end{aligned}$$

Sieht man hier u, v, t als Veränderliche an, so stellen diese Gleichungen ein durch die Bewegung des Hyperboloids definiertes Strahlensystem dar, dessen Stützfläche ξ, η, ζ ist.

Die Bedingung, daß dieses Strahlensystem ein Normalensystem ist, lautet

$$\frac{\partial \Sigma \frac{\partial x}{\partial u} \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Sigma \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \Phi}{\partial t}.$$

Setzt man hierin die Werte ein, so wird der Zähler der linken Seite eine von t unabhängige Funktion und die Bedingungsgleichung wird:

$$\frac{1}{\rho} [g' x_1 - f y_1 + g x_1' - f y_1'] - \frac{1}{r} [h' y_1 - g' z_1 + h y_1' - g z_1'] + f' = 0,$$

wo der Strich die Differentation nach u andeutet.

In dieser Gleichung sind $\frac{1}{\rho}$ und $\frac{1}{r}$ nur von t abhängig, ihre Koeffizienten und f' sind Funktionen von u. Man genügt ihr daher, indem man sie nach Potenzen von u ordnet und die Koeffizienten und das von u freie Glied Null setzt. So ergeben sich, wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\begin{aligned} A &= \chi b_1 - \psi a_1, & A' &= \psi c_1 - \chi b, \\ B &= \beta_1 \alpha_0 - \alpha_1 \beta_0, & B' &= \gamma_1 \beta_0 - \beta_1 \gamma_0, \\ C &= (\beta_0 a_1 - \alpha_0 b_1) - a (\alpha_0 \psi - \beta_0 \chi), \\ C' &= (\gamma_0 b_1 - \beta_0 c_1) - a (\beta_0 \omega - \gamma_0 \psi), \\ D &= \beta_1 a_1 - \alpha_1 b_1, & D' &= \gamma_1 b_1 - \beta_1 c_1, \\ & c = 2 k \cos \vartheta - a^2, \end{aligned}$$

die drei Bedingungsgleichungen

$$\frac{1}{\rho}[a\,A - k\,B] - \frac{1}{r}[a\,A' - k\,B'] - c\,\chi = 0,$$

$$\frac{1}{\rho}[c\,C - 2\,k\,D] - \frac{1}{r}[c\,C' - 2\,k\,D'] + [\alpha_0\,c - 2\,k\,a_1] = 0,$$

$$\frac{1}{\rho}[c\,D - 2\,k\,C] - \frac{1}{r}[c\,D' - 2\,k\,C'] + [\alpha_1\,c - 2\,k\,\alpha_0] = 0,$$

die alle drei in der gemeinsamen Form geschrieben werden können

$$\frac{1}{\rho}E_i + \frac{1}{r}F_i + G_i = 0,$$

wo $i = 1, 2, 3$.

Wir haben also eine lineare Beziehung zwischen den Krümmungen der Kurve, denn die E, F, G setzen sich aus den Konstanten zusammen, die das Hyperboloid und seine Lage angeben. Zur Bestimmung der 12 Konstanten haben wir außer den Fundamentalgleichungen zwischen den Richtungskosinus:

$$\Sigma\,\alpha_0^2 = 1, \qquad \Sigma\,\alpha_1^2 = 1, \qquad \Sigma\,\chi^2 = 1,$$
$$\Sigma\,\alpha_0\,\chi = 0, \qquad \Sigma\,\alpha_1\,\chi = 0, \qquad \Sigma\,\alpha_0\,\alpha_1 = \cos\vartheta$$

noch 4 Gleichungen:

$$ac\,(A'C - AC') + k\,c\,(BC' - B'C) + 2\,a\,k\,(AD' - A'D) + 2\,k^2\,(B'D - BD') = 0,$$

$$ac\,(A\,\alpha_1 + \chi\,D) - 2\,a\,k\,(A\,\alpha_0 - C\,\chi) + 2\,\alpha_0\,k^2\,B = 0,$$

$$CD' - C'D = 0,$$

$$C\,\alpha_1 - D\,\alpha_0 = 0,$$

die sich aus der Proportionalität der E, F, G ergeben, da die obige lineare Beziehung zwischen den Krümmungen ein und dieselbe Kurve definiert.

Wir haben also zur Bestimmung der 12 Konstanten nur 10 Gleichungen, sodaß sich im allgemeinen ∞^2 Lösungen ergeben. Es gilt daher der Satz: Soll die eine Schar der Erzeugenden eines mit dem Dreikant einer Kurve fest verbundenen einschaligen Hyperboloids bei der Bewegung des Dreikants ein Normalensystem beschreiben, so muß die Kurve eine Bertrandsche sein; das Hyperboloid kann in bezug auf die Kurve ∞^2 Lagen einnehmen.

Betrachtet man den Spezialfall, wo a mit der Hauptnormalen der Kurve zusammenfällt, und führt statt ϑ den Winkel $-\varphi$ ein, so erhält man aus den angeführten Formeln

$$\alpha_1 = 0, \qquad \beta_1 = 0, \qquad \gamma_1 = 1,$$
$$\alpha_0 = \sin\varphi, \qquad \beta_0 = 0, \qquad \gamma_0 = \cos\varphi,$$
$$\chi = 0, \qquad \varphi = 1, \qquad w = 0.$$

Zwischen den Krümmungen besteht dann die Relation

$$\frac{\sin\varphi}{\rho} + \frac{\cos\varphi}{r} = \frac{\sin\varphi}{a}.$$

Wir wollen aus der Gleichung des Hyperboloids (S. 46) noch den Wert für $k = u\,w$ bestimmen, wenn dieses orthogonal wird. Die Bedingung dafür ist, wenn wieder statt ϑ der Winkel $-\varphi$ eingeführt wird,

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{k\sin^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{k\cos^2\frac{\varphi}{2}} = 0$$

oder

$$k = u\,w = -\frac{a^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = \text{konst.}$$

In diesem Falle sind die von den Parallelen zu den Binormalen der beiden zugeordneten Kurven gebildeten Flächen, die im Satze von Bioche (S. 44) auftreten, die Brennflächen des Normalensystems, das die Schar der Erzeugenden des Hyperboloids, zu der die Parallelen zu den Binormalen nicht gehören, bei der Bewegung längs der Kurve erzeugt.

Die Kurven konstanter Torsion erhält man aus dem allgemeinen Fall, wenn die Achse a mit der Tangente der Kurve zusammenfällt. Die Gleichung der Kurve lautet in diesem Falle

$$\frac{\sin\vartheta}{r} = \frac{a}{k}.$$

Mit Hilfe des Satzes von Bioche bestimmt Rouquet[1]) die Minimalflächen, die als asymptotische Linie eine Bertrandsche Kurve zulassen. Nach Ausführungen über die sphärische Indikatrix (vgl. S. 28) beweist er zunächst den Satz:

Damit eine Asymptotenlinie einer Minimalfläche Bertrandsche Kurve ist, ist notwendig und hinreichend, daß die entsprechende Kurve der konjugierten Fläche sphärische Krümmungslinie von dieser ist.

[1]) Lit. 42.

Dies folgt aus geometrischen Überlegungen, da den Asymptotenlinien einer Minimalfläche die Krümmungslinien der konjugierten entsprechen, und da die notwendige und hinreichende Bedingung für das Entsprechen zweier Kurven auf konjugierten Minimalflächen ist, daß entsprechende Bogenelemente gleich und orthogonal sind, diese Bedingung aber für die Bertrandsche Kurve und die zu ihrer sphärischen Indikatrix parallele (Winkel der Radien $\varphi - \frac{\pi}{2}$, s. S. 29) erfüllt sind.

Wie wir gesehen haben, ist die von den durch die Punkte einer Bertrandschen Kurve zu den Binormalen der zugeordneten Kurve gezogenen Parallelen gebildete Fläche auf das Rotationshyperboloid abwickelbar, dessen Kehlkreis den Radius a hat und dessen gradlinigen Erzeugenden mit der Achse den Winkel φ bilden.

Wir wollen nun die Minimalkurven betrachten, die man erhält, wenn man auf der Biocheschen Regelfläche von der Kurve ab Strecken $\pm \frac{i\,a}{\sin \varphi}$ bis zu den Punkten P, Q abträgt. Die Tangenten an die Linien in diesen Punkten sind parallel der Oskulationsebene in dem entsprechenden Punkte der Bertrandschen Kurve. Die Mitten der Verbindungslinien der Punkte P und Q bilden eine Minimalfäche, an der die Bertrandsche Kurve teil hat. Da die Tangentialebenen an diese Fläche zu den Tangenten an die Minimalkurven parallel sind, so fallen sie mit der Oskulationsebene der Ausgangskurve zusammen, d. h. diese ist Asymptotenlinie der Minimalfläche. Da es aber nur eine Minimalfläche gibt, die eine bestimmte Kurve als Asymptotenlinie zuläßt, so gilt der

Satz: Die Minimalfläche, die als Asymptotenlinie eine gegebene Bertrandsche Kurve zuläßt, ist der Ort der Mitten der Geraden, die die Punkte der Kurve von der Länge Null verbindet, die man erhält, wenn man auf den Parallelen zu den Binormalen der zugeordneten Kurve von der Kurve aus die Strecken $\pm \frac{i\,a}{\sin \varphi}$ abträgt.[1])

[1]) Rouquet sagt hier, daß diese Konstruktion für Kurven konstanter Torsion nicht mehr gültig ist, da in diesem Falle $\varphi = 0$ wird. Er

Die Flächen treten übrigens auch bei der auf S. 38 betrachteten Flächen auf, die von der Geraden g beschrieben werden, die sich auf D und D′ stützt. Da die Erzeugenden dieser Flächen die Hauptnormalen Bertrandscher Kurven sind, in deren Punkten die Hauptkrümmungsradien gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen sind, so ist die Regelfläche Minimalflächen einbeschrieben, die diese Kurve als asymptotische zulassen.

Von weiteren Abhandlungen, in denen die Bertrandschen Kurven in der Flächentheorie auftreten, sei zunächst noch eine Arbeit von Koenigs[1]) erwähnt, in der er für das Volumen, das eine geschlossene Kurve beschreibt, die sich fest verbunden mit dem Dreikant einer Kurve bewegt, erhält:

$$V = \int_P^Q \left(A - \frac{L}{r} + \frac{N}{\rho}\right) ds,$$

wenn man bezeichnet mit A, B, C die Projektionsflächen der geschlossenen Kurve auf die Ebenen des Dreikants und mit L, M, N die Sektoren, die von derselben Kurve erzeugt werden, wenn sie sich um den Einheitswinkel um jede der Achsen des Dreikants dreht. Führt man die Bogenlänge der sphärischen Indikatrix der Tangenten und Binormalen ein:

$$\sigma_1 = \int_0^s \frac{ds}{\rho}, \qquad \sigma_2 = \int_0^s \frac{ds}{r},$$

so wird das Volumen

$$V = A\,s - L\,\sigma_2 + N\,\sigma_1.$$

Soll dieses nun proportional dem Bogen der Kurve sein, an der sich die geschlossene entlang bewegt, also

$$k\,s = A\,s - L\,\sigma_2 + N\,\sigma_1,$$

wo k, A, L, N Konstante sind, so erhält man durch Differentation nach s:

$$k = A - \frac{L}{r} + \frac{N}{\rho},$$

---

berücksichtigt dabei nicht, daß dann auch $a = 0$ wird, und zwar werden $\sin\varphi$ und a so Null, daß ihr Quotient einen endlichen Grenzwert hat. Auf die Wiedergabe der von R. noch angegebenen Lösung mit Hilfe der Ribaucourschen isotropen Kongruenzen können wir daher verzichten.

[1]) Lit. 38.

d. h. zwischen den Krümmungen der Kurve muß eine lineare Beziehung mit konstanten Koeffizienten bestehen. Dasselbe Resultat erhält man, wenn das Volumen proportional dem Bogen der sphärischen Indikatrix sein soll, und zwar, wenn

$$V = k\,\sigma_1:$$

$$\frac{k - N}{\rho} + \frac{L}{r} = A,$$

und wenn

$$V = k\,\sigma_2:$$

$$\frac{L + k}{r} - \frac{N}{\rho} = A.$$

Auch auf eine Arbeit von Demartres[1]) ist noch hinzuweisen, in der alle Zirkelflächen bestimmt werden, deren Kreiserzeugenden gegen eine gleiche Schar geodätischer Linien um denselben Winkel i geneigt sind, der von einer Erzeugenden zur anderen variieren kann. Er kommt zum Ergebnis, daß i und der Radius der Kreise konstant sein müssen und daß zwischen den Krümmungen der Ausgangskurven eine lineare Relation bestehen muß. Das Resultat kann man folgendermaßen zusammenfassen:

Es sei eine Bertrandsche Kurve

$$\frac{\cos i}{\rho} + \frac{\sin i}{r} + \frac{1}{a} = 0$$

gegeben, und es werde um jeden Punkt der Kurve als Mittelpunkt ein Kreis mit dem Radius a beschrieben, dessen Ebene durch die Hauptnormale geht und mit der Oskulationsebene den Winkel $\frac{\pi}{2} - i$ bildet. Die Kreise erzeugen eine Fläche, auf der die unter dem Winkel i die Erzeugenden schneidenden Trajektorien geodätische sind, und zwar sind sie auch Bertrandsche Kurven.

Die Demartresschen Betrachtungen verallgemeinerte Razzaboni,[2]) indem er zeigte, daß sich statt des einen zwei Parameter einführen lassen. In einer anderen Arbeit[3]) zeigte er dann, daß die Flächen, auf denen eine Schar geodätischer Linien

[1]) Lit. 37.
[2]) Lit. 55.
[3]) Lit. 58.

Bertrandsche Kurven sind, durch eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung bestimmt werden können.

Die Bedingung, daß die zugeordnete einer Bertrandschen Kurve geodätische auf der Fläche ist, die die um die Punkte von C mit dem Radius a beschriebenen Kreise einhüllt, dient Pellet[1]) zur Bestimmung des Krümmungsradius der zweiten Kurve.

Zum Schlusse sei noch eine Arbeit von Enneper[2]) erwähnt, in der die geodätischen Linien der abwickelbaren Flächen bestimmt werden, deren Wendekurve der Bertrandschen Relation genügt. Ihre Gleichungen sind:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos H} + \operatorname{tg} H\,(T\sin\varphi - b) - (B\sin\varphi - c) = -\frac{s}{a},$$

wo H der Winkel der rektifizierenden Kante gegen die Tangente, d T und d B Kontingenz- und Torsionswinkel, b und c Integrationskonstante sind.

Damit wollen wir den Abschnitt über die Bertrandschen Kurven schließen. Wie schon am Schluß des ersten Paragraphen erwähnt wurde, treten sie noch mehrfach in der Literatur als Spezialfälle der Kurven auf, zwischen deren Krümmungen eine Beziehung zweiten Grades besteht. Da diese im folgenden Abschnitt eingehend behandelt werden, so können wir hier auf eine Wiedergabe verzichten, zumal die einzelnen Stellen im Literaturanhang mit angeführt sind.

---

[1]) Lit. 31.
[2]) Lit. 29, S. 297.

II. Abschnitt.

Die Kurven, zwischen deren Krümmungen eine Beziehung zweiten Grades besteht.

Eine naheliegende Verallgemeinerung der Bertrandschen Kurven wäre die Frage nach den Kurven, deren Binormalen oder Tangenten mit den Binormalen bzw. Tangenten einer zweiten Kurve zusammenfallen. Wie man sich durch einfache Rechnungen überzeugen kann, führen diese Fragen nur zu trivialen Ergebnissen.[1]) Erst die Frage nach den Kurven, die die Hauptnormalen mit den Binormalen einer zweiten Kurve gemeinsam haben, führt zu einem bemerkenswerten Resultat, und zwar erhält man eine spezielle Beziehung zweiten Grades, die im fünften Paragraphen eingehend behandelt werden soll.

Hier wollen wir zunächst von einer Frage, die sich Cesaro[2]) zuerst stellte, die bisher untersuchte allgemeinste Beziehung zweiten Grades ableiten.

§ 1.

Ableitung der allgemeinen Beziehung zweiten Grades und eines Spezialfalles.

Im allgemeinen sind die zur Tangente in der rektifizierenden Ebene parallelen Geraden die einzigen reellen, die eine abwickelbare Fläche einhüllen. Soll es andere mit dem Dreikant einer Kurve fest verbundene Geraden geben, die diese Bedingung erfüllen, so muß zwischen den Krümmungen der Kurve die Beziehung bestehen:

$$(1) \qquad \frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{\rho r} + \frac{C}{r^2} = \frac{D}{\rho} + \frac{E}{r}.$$

[1]) Scheffers I, 1910, S. 432/34.
[2]) Lit. 90 und Lit. 76, S. 189/92.

Cesaro leitet sie nach den Methoden der natürlichen Geometrie ab und nach ihm hat sie den Namen „Cesarosche Beziehung“ erhalten, wie auch von einigen Schriftstellern diese Kurven als Cesarosche bezeichnet werden. Da dieser Name aber schon einer gewissen Klasse von ebenen Kurven zugelegt ist, so scheint er wenig zweckmäßig, und deshalb wollen wir die Kurven im folgenden der Kürze wegen „Cesarosche Raumkurven“ nennen. Eine Ableitung auf dem gewöhnlichen analytischen Wege gab zuerst Hatzidakis.[1])

Besitzt die Gerade g im Dreikant mit den Achsen ξ, η, ζ die Richtungskosinus a, b, c und hat einer ihrer Punkte die Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0, so sind ihre Gleichungen:

$$\frac{\xi - \xi_0}{a} = \frac{\eta - \eta_0}{b} = \frac{\zeta - \zeta_0}{c}. \tag{2}$$

In bezug auf das im Raume feste Koordinatensystem x, y, z hat der Punkt ξ_0, η_0, ζ_0 die Koordinaten:

$$\begin{aligned} X &= x + \alpha\,\xi_0 + l\,\eta_0 + \lambda\,\zeta_0, \\ Y &= y + \beta\,\xi_0 + m\,\eta_0 + \mu\,\zeta_0, \\ Z &= z + \gamma\,\xi_0 + n\,\eta_0 + \nu\,\zeta_0, \end{aligned} \tag{3}$$

und die Richtungskosinus der Geraden sind in diesem System gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= a\,\alpha + b\,l + c\,\lambda, \\ \mathfrak{B} &= a\,\beta + b\,m + c\,\mu, \\ \mathfrak{C} &= a\,\gamma + b\,n + c\,\nu. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Bedingung, daß die erzeugte Fläche abwickelbar ist, ist:[2])

$$\begin{vmatrix} dX & \mathfrak{A} & d\mathfrak{A} \\ dY & \mathfrak{B} & d\mathfrak{B} \\ dZ & \mathfrak{C} & d\mathfrak{C} \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Aus den Formeln (3) und (4) erhält man

$$\frac{dX}{ds} = \alpha\left(1 - \frac{\eta_0}{\rho}\right) + l\left(\frac{\xi_0}{\rho} + \frac{\zeta_0}{r}\right) - \lambda\,\frac{\eta_0}{r},$$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{ds} = -\frac{\alpha\,b}{\rho} + l\left(\frac{a}{\rho} + \frac{c}{r}\right) - \lambda\,\frac{b}{r}$$

und vier entsprechende.

[1]) Lit. 103. Für die leihweise Überlassung eines Sonderabdrucks dieser Arbeit möchte ich an dieser Stelle noch Herrn Professor Dr. R. Rothe (Charlottenburg) meinen besten Dank aussprechen.

[2]) Lit. 9, S. 370.

Führt man diese Werte in (5) ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Frenetschen Formeln und der Beziehungen zwischen den Richtungskosinus des Dreikants die gesuchte Beziehung:

$$\frac{c\,(a\,\eta_0 - b\,\xi_0)}{\rho^2} - \frac{a\,(a\,\eta_0 - b\,\xi_0) + c\,(b\,\zeta_0 - c\,\eta_0)}{\rho\,r} + \frac{a\,(b\,\zeta_0 - c\,\eta_0)}{r^2} = \frac{a\,c}{\rho} + \frac{b^2 + c^2}{r}. \tag{6}$$

Von weiteren Arbeiten, die sich mit diesem Gegenstande beschäftigen, sei hier noch ein Satz von Mannheim[1]) erwähnt, aus dem sich das obige Resultat ableiten läßt:

Eine Gerade hüllt eine abwickelbare Fläche ein, wenn sie die Adjungierte zu einer Ebene trifft, die zu ihr senkrecht ist.

Unter der Adjungierten zu einer Ebene versteht er dabei die Gerade, die durch den Nullpunkt der Ebene geht parallel zur Schraubungsachse.

Rouquet[2]) leitet die Cesarosche Gleichung aus der Bedingung ab, daß der Verteilungsparameter gleich Null sein muß, falls die Gerade g eine abwickelbare Fläche erzeugen soll. Ist V die Translationsgeschwindigkeit um die Schraubungsachse, Ω die Rotationsgeschwindigkeit um diese, so ist der Verteilungsparameter gegeben durch

$$p = \delta \cos \theta - \frac{v}{\Omega},$$

wo δ der Abstand der Geraden g von der Schraubungsachse ist. Damit g eine abwickelbare Fläche beschreibt, muß also sein

$$\delta \cos \theta = \frac{v}{\Omega}.$$

Als Interpretation für diese Gleichung hat er dann den Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine mit einem beweglichen System verbundene Gerade g eine abwickelbare Fläche erzeugt, ist, daß diese Gerade Tangente zur Trajektorie eines ihrer Punkte ist, der der Fußpunkt der gemeinsamen Senkrechten von g und der Schraubungsachse ist; oder

[1]) Lit. 7, S. 110.
[2]) Lit. 100.

es muß auf g ein Punkt M vorhanden sein, so, daß die g enthaltenden Ebenen, die bzw. durch die Tangente M B an die Trajektorie (M) und durch die zur Achse Parallele M C gehen, rechte Winkel bilden. Gilt dies für einen Punkt, so hat jeder Punkt der Geraden die Eigenschaft.

Auf einen speziellen Fall der Kurven mit quadratischer Beziehung zwischen den Krümmungen, wo nämlich das Glied mit $\frac{1}{r}$ fehlt, gelangt man mit Demoulin[1]) bei der Frage, wann die Achse der unendlich kleinen Schraubung, die das begleitende Dreikant in das benachbarte überführt, ein Plückersches Konoid beschreibt. Es ist dies eine Erweiterung der Untersuchungen, die er früher[2]) für Kurven konstanter Torsion angestellt hatte, und die dann von Mannheim[3]) auf Bertrandsche Kurven ausgedehnt wurden.

Nimmt man als Koordinatensystem die Achsen des Dreikants, so ist die allgemeinste Gleichung des Plückerschen Konoids, dessen Geraden die Hauptnormale treffen:

$$A x^2 + B x z + C z^2 + D y (x^2 + z^2) = 0.$$

Die Gleichungen der Schraubungsachse sind:

$$r x + \rho z = 0, \qquad y = \frac{r^2 \rho}{\rho^2 + r^2}.$$

Setzt man diese in die Gleichung des Konoids ein, so erhält man zwischen den Krümmungen der Kurve die Bedingung

$$\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r \rho} + \frac{C}{\rho^2} + \frac{D}{\rho} = 0.$$

Für $B = 0$ geht diese über in die spezielle Relation, die im § 4 näher behandelt wird. Setzt man hierin $-\frac{A}{D} = \frac{C}{D} = a$, so gelangt man zu den Kurven, die durch eine abwickelbare Fläche der Schraubungsachsen charakterisiert sind (§ 5). Die Bertrandschen Kurven erhält man für $A = 0$. Wird außerdem

[1]) Lit. 92.
[2]) Bull. de la Soc. Math. de France **20** (1892), S. 43/46.
[3]) s. S. 22.

$C = 0$, so hat die Kurve konstante Torsion; ist $A = B = 0$, so hat sie konstante Krümmung. Die Kurve wird zur Schraubenlinie, wenn $D = 0$ ist. Das Verhältnis ihrer Krümmungen ist dann gegeben durch

$$\frac{\rho}{r} \quad \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

§ 2.

Diskussion der Cesaroschen Bedingungsgleichung.

Im vorigen Kapitel hatten wir die Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{\rho r} + \frac{C}{r^2} = \frac{D}{\rho} + \frac{E}{r}.$$

$$\begin{aligned} \sigma A &= c\,(a\,\eta_0 - b\,\xi_0), \\ \sigma B &= -a\,(a\,\eta_0 - b\,\xi_0) - c\,(b\,\zeta_0 - c\,\eta_0), \\ \sigma C &= a\,(b\,\zeta_0 - c\,\eta_0), \\ \sigma D &= a\,c, \\ \sigma E &= b^2 + c^2, \end{aligned} \qquad (2)$$

wo σ ein Proportionalitätsfaktor ist.

Sind die Krümmungen der Kurve nicht durch die Gleichung (1) verbunden, so müssen sämtliche Koeffizienten Null sein, d. h., wenn von $\sigma = 0$ abgesehen wird,

$$b = c = 0, \qquad \eta_0 = 0,$$

oder

$$a = 0, \quad b = \pm i\,c, \qquad \xi_0 = 0, \qquad \zeta_0 = \pm i\,\eta_0.$$

Wir erhalten also den bereits S. 54 ausgesprochenen Satz, daß bei einer beliebigen Kurve die zur Tangente parallelen Geraden in der rektifizierenden Ebene die einzigen reellen sind, die bei der Bewegung des Dreikants eine abwickelbare Fläche erzeugen. Außerdem existieren noch Minimalgeraden, die durch die Kurve gehen und in der Normalebene liegen.

Besteht aber zwischen den Krümmungen einer Kurve die Gleichung (1)[1]), so kann man aus den ersten drei Gleichungen

[1]) Diskussionen der Beziehung finden sich bei Cesaro, Lit. 90; Lit. 76, S. 189/92; Lit. 98, S. 5/11; Andrade, Lit. 95; Rouquet, Lit. 100; Hatzidakis, Lit. 103; Joachimi, Lit. 108, S. 18/23; Salkowski, Lit. 109; Moschkowitsch, Lit. 112.

von (7) $a\,\eta_0 - b\,\xi_0$ und $b\,\zeta_0 - c\,\eta_0$ eliminieren und erhält

$$(8) \qquad -\frac{a\,A}{c} - \frac{c\,C}{a} = B$$

oder

$$(9) \qquad a^2\,A + c^2\,C + ac\,B = 0.$$

Die letzten beiden Gleichungen von (7) ergeben:

$$(10) \qquad D\,(b^2 + c^2) = ac\,E.$$

(Bei der Ableitung von (9) und (10) ist $a \neq 0$ und $c \neq 0$ angenommen worden. Die entgegengesetzten Fälle behandeln wir weiter unten gesondert).

Aus (9) und (10) erkennt man, daß außer den oben erhaltenen Geraden hier vier weitere existieren, die eine abwickelbare Fläche einhüllen, und zwar sind sie den Schnittlinien eines Kegels mit einem Ebenenpaar parallel. Die Gleichung des Kegels lautet

$$(11) \qquad D\,(\eta^2 + \zeta^2) = E\,\xi\,\zeta,$$

die des Ebenenpaares, das reell oder imaginär sein kann:

$$A\,\xi^2 + C\,\zeta^2 + B\,\xi\,\zeta = 0.$$

Der Träger des Ebenenpaares läuft parallel zur Hauptnormalen.

Die Spitze des Kegels liegt im Koordinatenanfang, er wird von der rektifizierenden Ebene geschnitten in den beiden Geraden

$$\zeta = 0, \qquad \zeta = \frac{E\,\xi}{D}.$$

Die Oskulationsebene berührt er längs der Tangente.

Zur weiteren Bestimmung der Geraden berechnen wir ihre Richtungskosinus. Aus den beiden letzten Gleichungen von (7) erhält man

$$a = \varepsilon \sqrt{1 - \sigma E},$$

$$b = \varepsilon_1 \sqrt{\sigma E - \frac{\sigma^2 D^2}{1 - \sigma E}},$$

$$c = \varepsilon \frac{\sigma D}{\sqrt{1 - \sigma E}},$$

wo ε und ε_1 die Größen ± 1 bedeuten.

Setzen wir diese Werte in (9) ein, so wird diese Gleichung

$$\sigma^2 (A E^2 - B D E + C D^2) + \sigma (B D - 2 A E) + A = 0.$$

Da wir a und c $\neq 0$ vorausgesetzt haben, so ist der Faktor von σ^2 nicht Null, und wir erhalten für den Proportionalitätsfaktor den Wert

$$\sigma = \frac{2 A E - B D \pm D \sqrt{B^2 - 4 A C}}{2 (A E^2 - B D E + C D^2)}.$$

Eine der Größen ε oder ε_1 können wir willkürlich festsetzen, da wir dadurch nur einen bestimmten Richtungssinn auf der Geraden festlegen. Da die andere dann aber unbestimmt bleibt, so haben wir daraus schon zwei verschiedene Richtungen, und da auch σ im allgemeinen zwei verschiedene Werte hat, so haben wir im Ganzen 4 Richtungen.

$B^2 - 4 A C$ muß stets ≥ 0 sein. Ist es > 0, so haben wir zwei, ein oder kein Paar von reellen Schnittgeraden.

Wir betrachten nun die 3 Unterfälle

I. $A = 0$, II. $C = 0$, III. $B = 2 \sqrt{A C}$,

bei denen beide Ebenen des Paares zusammenfallen.

I. Ist $A = 0$, so geht das Ebenenpaar über in die eine Ebene

$$C \zeta + B \xi = 0.$$

Dann haben wir also 2 Schnittgeraden. Beide können nur dann zusammenfallen, wenn

$$b = 0;$$

dann wird die Gleichung (10)

$$D c = a E$$

oder, wenn wir a und c eliminieren,

$$B D + C E = 0.$$

Aus (7_1) folgt, wenn die Cesarosche Bedingung gelten soll, $\eta_0 = 0$, und dies hat zur Folge, daß $B = C = 0$. Ist dies aber nicht der Fall und besteht die Gleichung $B D + C E = 0$, so werden die Cesaroschen Geraden illusorisch. Formt man hiermit die Gleichung (1) um, so wird diese:

$$\frac{B}{r} \left(\frac{E}{\rho} - \frac{D}{r} \right) = E \left(\frac{D}{\rho} + \frac{E}{r} \right),$$

d. h., die Kurven, die eine natürliche Gleichung der Form

$$\frac{B}{r}\left(\frac{E}{\rho}-\frac{D}{r}\right)=E\left(\frac{D}{\rho}+\frac{E}{r}\right)$$

besitzen, gehören nicht zu den eigentlichen Cesaroschen Raumkurven.

Für $A=0$ wird

$$\sigma=-\frac{B}{CD-BE},$$

$$a=\varepsilon\sqrt{\frac{CD}{CD-BE}},$$

$$b=\varepsilon_1\sqrt{\frac{-B(BD+CE)}{C(CD-BE)}},$$

$$c=-\varepsilon B\sqrt{\frac{D}{C(CD-BE)}}.$$

Bei der Berechnung dieser Werte ist

$$CD-BE\neq 0$$

vorausgesetzt.

Ist dies aber doch Null, und setzt man die Werte aus (7) hier ein, so erhält man

$$a^2(b\zeta_0-c\eta_0)=-(b^2+c^2)(b\zeta_0-c\eta_0).$$

Da $B\neq 0$ und $C\neq 0$, also $b\zeta_0-c\eta_0\neq 0$, so wird diese Gleichung erfüllt durch

$$a^2+b^2+c^2=0$$

d. h.: Ist

$$\frac{B}{\rho r}+\frac{C}{r}=\frac{D}{\rho}+\frac{E}{r},$$

wo zwischen den Koeffizienten die Beziehung

$$CD-BE=0$$

besteht, so existieren Minimalgeraden, die eine Minimalkurve einhüllen.

Die Kurve zerfällt in diesem Falle in eine konstanter Torsion und eine Schraubenlinie, von denen jede für sich mit ∞^1 Minimalgeraden verbunden ist.

Ist außer A auch B = 0, so ist nach (7) auch C oder D Null, also:

Die Kurven

$$\frac{C}{r^2} = \frac{D}{\rho} + \frac{E}{r} \qquad (C, D \neq 0)$$

gehören nicht zu den eigentlichen Cesaroschen Raumkurven.

Ebenso folgt aus A und C = 0 auch B oder D = 0, d. h.:

Die Kurven

$$\frac{B}{\rho r} = \frac{D}{\rho} + \frac{E}{r} \qquad (B, D \neq 0)$$

sind keine eigentlichen Cesaroschen Raumkurven.

II. Ist C = 0, so wird die Gleichung des Ebenenpaares

$$A\xi + B\zeta = 0,$$

sie gehen also wieder in eine Ebene über.

Die allgemeinen Formeln ergeben

$$\sigma = -\frac{A}{BD - AE}, \qquad a = \varepsilon \sqrt{\frac{BD}{BD - AE}},$$

$$b = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{-A(AD + BE)}{BD - AE}}, \qquad c = -\varepsilon A \sqrt{\frac{D}{BD - AE}}.$$

Da der Fall A = 0 schon erledigt ist, so können die beiden Geraden nur zusammenfallen, wenn

$$AD + BE = 0.$$

Nach (7_3) ist auch $\eta_0 = 0$, dann muß auch A = 0 und B = 0 sein.

Ist dies aber nicht der Fall und besteht

$$AD + BE = 0,$$

so kann man die Gleichung (1) damit umformen und erhält:

Die durch die Gleichung

$$\frac{A}{\rho}\left(\frac{E}{\rho} - \frac{D}{r}\right) = E\left(\frac{D}{\rho} + \frac{E}{r}\right)$$

dargestellten Kurven gehören nicht zu den eigentlichen Cesaroschen Raumkurven.

Die mit der Kurve verbundenen Geraden werden zu Minimalgeraden, wenn

$$AE - BD = 0.$$

Die Kurvengleichung wird in diesem Falle

$$\left(\frac{B}{\rho} - E\right)\left(\frac{D}{\rho} + \frac{E}{r}\right) = 0.$$

Bis hier war vorausgesetzt, daß A und $B \neq 0$. Der Fall $A = 0$ ist schon vorhin betrachtet worden. Ist $B = 0$, so muß auch $D = 0$ sein. Wir haben also den

Satz: Die Kurven

$$\frac{A}{\rho^2} = \frac{D}{\rho} + \frac{E}{r} \quad (D \neq 0)$$

sind keine eigentlichen Cesaroschen Raumkurven.

III. Der dritte Fall, in dem das Ebenenpaar zu einer Ebene wird, ist

$$B = 2\sqrt{AC}.$$

Es ergeben sich die Werte

$$\sigma = \frac{A}{AE - \frac{BD}{2}}, \quad a = \varepsilon \sqrt{\frac{-\frac{BD}{2}}{AE - \frac{BD}{2}}},$$

$$b = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{A(BE + 2AD)}{B\left(AE - \frac{BD}{2}\right)}}, \quad c = \varepsilon \frac{AD}{\sqrt{-\frac{BD}{2}\left(AE - \frac{BD}{2}\right)}}.$$

Die beiden Schnittgeraden fallen zusammen, wenn

$$BE + 2AD = 0.$$

Die Bedingung $B = 2\sqrt{AC}$ wird dann

$$\eta_0 (a + ic)^2 = 0,$$

also entweder

$$\eta_0 = 0 \quad \text{oder} \quad a = -ic.$$

Bei der Berechnung der Werte für σ, a, b, c war angenommen

$$AE - \frac{BD}{2} \neq 0.$$

Ist dies = 0, so wird die natürliche Gleichung der Kurve

$$\left(\frac{D}{\rho}+\frac{E}{r}\right)\left(\frac{A}{D^2}\left[\frac{D}{\rho}+\frac{E}{r}\right]-1\right)=0.$$

Die Kurve zerfällt also in eine Schraubenlinie und eine Bertrandsche Kurve (s. S. 66), bei der ∞^1 Minimalgerade existieren, die eine abwickelbare Fläche einhüllen.

Im Anschluß hieran haben wir noch den Fall

$$A \neq 0 \qquad C \neq 0$$

zu betrachten; dann ist sicher nach (7) $a \neq 0$, $c \neq 0$, also $D \neq 0$, d. h.: die Kurven

$$\frac{A}{\rho^2}+\frac{B}{\rho r}+\frac{C}{r^2}=\frac{E}{r} \qquad (E \neq 0)$$

sind keine eigentlichen Cesaroschen Raumkurven.

Zu ihnen gehören als Spezialfall auch die Kurven, deren Windungsparameter konstant ist (s. S. 107).

Die uneigentlichen Cesaroschen Raumkurven, d. h. die, bei denen es außer den Parallelen zur Tangente in der rektifizierenden Ebene keine mit dem Dreikant fest verbundene Geraden gibt, die abwickelbare Flächen einhüllen, sind also folgende Kurven mit quadratischer Beziehung zwischen den Krümmungen:

1. $$\frac{B}{r}\left(\frac{E}{\rho}-\frac{D}{r}\right)=E\left(\frac{D}{\rho}+\frac{E}{r}\right),$$

2. $$\frac{C}{r^2}=\frac{D}{\rho}+\frac{E}{r} \qquad (C, D \neq 0),$$

3. $$\frac{B}{\rho r}=\frac{D}{\rho}+\frac{E}{r} \qquad (B, D \neq 0),$$

4. $$\frac{A}{\rho}\left(\frac{E}{\rho}-\frac{D}{r}\right)=E\left(\frac{D}{\rho}+\frac{E}{r}\right),$$

5. $$\frac{A}{\rho^2}=\frac{D}{\rho}+\frac{E}{r} \qquad (D \neq 0),$$

6. $$\frac{A}{\rho^2}+\frac{B}{\rho r}+\frac{C}{r^2}=\frac{E}{r} \qquad (E \neq 0).$$

Bisher war $a \neq 0$ und $c \neq 0$ vorausgesetzt. Ist

$$a = 0,$$

so wird $C = D = 0$ und die quadratische Beziehung erhält die Form

$$\frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{\rho r} = \frac{E}{r}.$$

In diesem Falle existieren ∞^1 euklidische Geraden. Aus (7) erhält man durch Elimination von a, b, c, daß die Geraden die Erzeugenden eines Konoids 3. Ordnung sind, das die Normalebene zur Leitebene hat und dessen Gleichung lautet

$$A\,\eta^2 + (B\,\xi - A\,\zeta)\,(B\,\xi - A\,\zeta - E\,\xi\,\eta) = 0.$$

Die Erzeugenden des Konoids schneiden sich paarweise in einer Geraden $B\,\xi - A\,\zeta = 0$ in der rektifizierenden Ebene.

Die Projektionen der Geraden des Konoids umhüllen in der Normalebene die Parabel

$$\zeta^2 = -\frac{4\,B}{E}\,\eta + \frac{4\,B^2}{E^2},$$

deren Brennpunkt auf der Kurve liegt und deren Leitlinie die Gerade $\eta = \frac{2\,B}{E}$ ist. Die Berührungspunkte der Projektionsgeraden und der Parabel fallen mit den Punkten zusammen, wo die Geraden von der Binormalen geschnitten werden.

Führt man $b = \cos\phi$ ein, so ist $c = \sin\phi$ und die Gleichungen (7) werden

$$A = -\xi_0 \sin\phi \cos\phi,$$
$$B = \eta_0 \sin^2\phi - \zeta_0 \sin\phi \cos\phi.$$

Aus der ersten Gleichung sieht man, daß der kleinste Wert, den $|\xi_0|$ annehmen kann, $2\,A$ ist, d. h. der Teil der Geraden $B\,\xi - A\,\zeta = 0$, der zwischen den Ebenen $\xi_0 = -2\,A$ und $\xi_0 = +2\,A$ liegt, mit Ausnahme des Anfangspunktes, gehört nicht der Fläche an. In den Punkten $\xi_0 = \pm 2\,A$, $\zeta_0 = \pm 2\,B$ fallen die beiden von der Geraden $B\,\xi - A\,\zeta = 0$ ausgehenden Erzeugenden des Konoids in eine zusammen. Das Konoid liegt symmetrisch zur Hauptnormalen. Ist

$$c = 0,$$

so wird $A = D = 0$. Die Kurve zerfällt in eine ebene und eine Bertrandsche Kurve, auf die wir noch zurückkommen.

Ist die Beziehung (1) zerlegbar, so kann sie linear und homogen oder nur linear sein. Wir betrachten zunächst den zweiten Fall, wo die Kurve zu den Bertrandschen gehört. Wir

werden hier durch direkte Ableitung die hyperbolischen Paraboloide erhalten, von denen schon im ersten Abschnitt die Rede war (S. 40 ff.).

Schreiben wir (1) in der Form

$$\frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{\rho r} + \frac{C}{r^2} - \frac{D}{\rho} - \frac{E}{r} = \left(\frac{D}{\rho} + \frac{E}{r}\right)\left(\frac{p}{\rho} + \frac{q}{r} - 1\right),$$

so erhalten wir durch Koeffizientenvergleichung

$$A = D\,p, \qquad B = D\,q + E\,p, \qquad C = E\,q.$$

Die Koeffizienten sind in diesem Falle durch die Gleichung

$$A\,E^2 - B\,D\,E + C\,D^2 = 0$$

verbunden. Es existieren reelle und Minimalgerade. Die letzteren haben wir bereits auf S. 64 erhalten.

Mit den Werten für A, B, C gehen die Gleichungen (9) und (10) über in

$$D\,(b^2 + c^2) = E\,ac,$$
$$D\,p\,a^2 + E\,q\,c^2 + (D\,q + E\,p)\,a\,c = 0,$$

oder da $b^2 + c^2 = 1 - a^2$ ist:

$$D = a\,(a\,D + c\,E),$$
$$(a\,p + c\,q)\,(a\,D + c\,E) = 0.$$

Es sind also folgende Fälle möglich, wobei wir $p = 0$, $q = 0$ vorerst ausschließen und auch von den Parallelen zur Tangente in der rektifizierenden Ebene absehen:

$$\text{I.} \quad a\,p + c\,q = 0,$$
$$\text{II.} \quad a\,D + c\,E = 0.$$

Betrachten wir

(14) $$\text{I.} \quad a\,p + c\,q = 0.$$

Aus

$$A = D\,p = c\,(a\,\eta_0 - b\,\xi_0) \text{ und } D = ac$$

folgt

(15) $$a\,\eta_0 - b\,\xi_0 = a\,p.$$

Aus

$$C = E\,q = a\,(b\,\zeta_0 - c\,\eta_0) \text{ und } E = b^2 + c^2$$

erhält man

$$b\,(a\,\zeta_0 - b\,q) = c\,(c\,q + a\,\eta_0),$$

oder da nach (15) $\eta_0 = \frac{a\,p + b\,\xi_0}{a}$, so wird

$$b\,(a\,\zeta_0 - b\,q - c\,\xi_0) = c\,(c\,q + a\,p),$$

also mit (14)

(16) $$b\,(a\,\zeta_0 - b\,q - c\,\xi_0) = 0.$$

Wir haben also die beiden Unterfälle:

$$b = 0, \qquad a\,\zeta_0 - c\,\xi_0 = b\,q.$$

1) $b = 0$.

Nach (15) ist

$$\eta_0 = p.$$

Die Geraden liegen in der Ebene

(17) $$\eta = p,$$

die zur rektifizierenden Ebene parallel ist und da außerdem $a\,p + c\,q = 0$, also

$$\frac{a}{c} = -\frac{q}{p} = \text{konst.},$$

so sind alle Geraden zu einander parallel.

2) $a\,\zeta_0 - c\,\xi_0 = b\,q$.

Die Gleichungen (2) der Geraden können wir in der Form schreiben

$$\xi\,b - \eta\,a = \xi_0\,b - \eta_0\,a,$$
$$\xi\,c - \zeta\,a = \xi_0\,c - \zeta_0\,a.$$

Durch Zusammenfassen mit unserer Bedingungsgleichung und (15) gehen diese über in:

$$\xi\,b - a\,\eta = -a\,p,$$
$$\xi\,c - \zeta\,a = -b\,q,$$

oder

$$\xi\,\frac{b}{a} - \eta = -p,$$
$$\xi\,\frac{c}{a} - \zeta = -\frac{b}{a}\,q.$$

Wenn man aus diesen beiden Gleichungen und (14) die Größen $\frac{b}{a}$ und $\frac{c}{a}$ eliminiert, erhält man die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloids

(18) $$\xi\,(p\,\xi + q\,\zeta) = q^2\,(\eta - p).$$

Die Lösungsgeraden sind also in diesem Falle die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids, die der Ebene

(19) $$p\,\xi + q\,\zeta = 0$$

parallel sind.

II. $$a\,D + c\,E = 0.$$

Dann folgt aus (13_1) $D = 0$, also auch $c = 0$. Die Gleichungen (7) werden

$$B = E\,p = -\,a\,(a\,\eta_0 - b\,\xi_0),$$
$$C = E\,q = a\,b\,\zeta_0,$$
$$E = b^2.$$

Durch Ausscheidung von E erhält man

$$p\,b^2 = -\,a\,(a\,\eta_0 - b\,\xi_0),$$
$$q\,b = a\,\zeta_0.$$

Eliminiert man wieder mit Hilfe der Gleichungen (2) die Größen ξ_0, η_0, ζ_0, so gehen diese über in

$$p\,b^2 = a\,(b\,\xi - a\,\eta),$$
$$q\,b = a\,\zeta.$$

Durch Zusammenfassung beider erhält man wieder ein hyperbolisches Paraboloid:

(20) $$\zeta\,(p\,\zeta - q\,\xi) + q^2\,\eta = 0.$$

Die Lösungsgeraden sind also in diesem Falle die Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloids, die der Oskulationsebene parallel sind.

Nach Salkowski[1]) kann man sich von der Art der Erzeugenden durch folgende Überlegung leicht eine Vorstellung verschaffen. Nach Laguerres Satz (S. 41) geht der Kehlkreis eines Rotationshyperboloids bei einer Verbiegung dieser Fläche unter Beibehaltung der Geradlinigkeit der Erzeugenden in eine Bertrandsche Kurve über. Läßt man das Rotationshyperboloid über seine Biegungsregelfläche abrollen, so fällt das Dreikant des Kehlkreises mit dem der Bertrandschen Kurve zusammen. Nun sind die Tangenten der Parallelkreise der Rotationsfläche mit dem Dreikant des Kehlkreises fest verbunden, d. h. diese Geraden erzeugen beim Abrollen des Hyperboloids über die Biegungs-

[1]) Lit. 109, S. 530.

fläche abwickelbare Flächen, deren Gratlinien die Parallelkreise des Hyperboloids sind.

Im Anschluß hieran wollen wir noch kurz die Spezialfälle der Kurven konstanter Krümmung und konstanter Torsion betrachten.

Die Kurven haben konstante Krümmung, wenn $q = 0$ wird. Gehen wir wieder auf die drei Fälle ein:

I. 1) wir haben wieder die parallelen Geraden in der zur rektifizierenden Ebene parallelen Ebene

$$\eta = p.$$

Da nach (14) $a = 0$ ist, so sind sie senkrecht zur Tangente.

2. Aus (19) folgt

$$\xi^2 = 0.$$

Da auch hier $a = 0$ ist, so liegen die Geraden in der Normalebene.

II. Aus der Gleichung des Paraboloids erhält man

$$\zeta^2 = 0$$

und da $c = 0$, so haben wir die Geraden in der Oskulationsebene.

Es bleibt noch übrig die Umhüllungsgebilde der Geraden unter I_2) und II) zu bestimmen, d. h. zu untersuchen, in was die hyperbolischen Paraboloide der Bertrandschen Kurven übergehen, wenn diese konstante Krümmung haben.

Im ersten Falle ist

$$B = E\,p = -\,c\,(b\,\zeta_0 - c\,\eta_0),$$
$$E = 1.$$

Nimmt man wieder die Gleichungen (2) hinzu, so erhält man hieraus die Gleichungen der Geraden in der Normalebene in der Form:

$$p + c\,(b\,\zeta - c\,\eta) = 0.$$

Zur Bestimmung der Enveloppe werden dann, da $b = \sqrt{1 - c^2}$ ist, die Gleichungen

$$\begin{aligned} &p + c\,(b\,\zeta - c\,\eta) = 0, \\ &\zeta\,(1 - 2\,c^2) = 2\,c\,\eta\,\sqrt{1 - c^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Scheidet man aus beiden c aus, so wird die Gleichung der Enveloppe:

$$\zeta^2 + 4\,p\,\eta = 4\,p^2.$$

Das Paraboloid wird also zu einer Parabel in der Normalebene, deren Scheitel im Krümmungsmittelpunkt der Kurve und deren Brennpunkt auf der Kurve selbst liegt.

Für den anderen Fall ist

$$B = E\,p = -\,a\,(a\,\eta_0 - b\,\xi_0),$$
$$E = b^2.$$

Die Gleichungen der Lösungsgeraden werden hier, indem man diese beiden mit (2) zusammenfaßt:

$$-\,a\,(a\,\eta - b\,\xi) = p\,b^2$$

oder da $b^2 = 1 - a^2$

$$a\,\xi\,\sqrt{1 - a^2} = a^2\,(\eta - p) + p.$$

Die Enveloppe erhalten wir durch Elimination von a aus dieser Gleichung und

$$2\,a\,(\eta - p)\,\sqrt{1 - a^2} = \xi\,(1 - 2a^2)$$

in der Form

$$\xi^2 = 4\,p\,\eta.$$

Also auch diese stellt eine Parabel dar, und zwar liegt sie in der Oskulationsebene mit dem Scheitel auf der Kurve und dem Brennpunkt im Krümmungsmittelpunkt.

Die Existenz zweier Paraboloide bzw. Parabeln ist aus der Zusammengehörigkeit des Bertrandschen Kurvenpaares zu erklären, indem gewissermaßen jedes der Paraboloide bzw. jede der Parabeln zu einer Kurve gehört.

Hat die Kurve konstante Torsion, ist also $p = 0$, so fallen die Geraden unter I_1) mit den zur Tangente parallelen in der rektifizierenden Ebene zusammen, denn (17) gibt $\eta = 0$ und nach (14) ist $c = 0$.

Die beiden Paraboloide fallen zusammen, ihre Gleichung ist

$$\xi\,\zeta = q\,\eta.$$

Von weiteren Spezialfällen, die in (1) enthalten sind, haben wir noch die Schraubenlinien zu erwähnen.

Ist

$$A = B = C = 0,$$

also die Kurve dargestellt durch das Verhältnis der Krümmungen

$$\frac{\rho}{r} = -\frac{D}{E},$$

so fällt die Gleichung des Ebenenpaares (12) weg und alle

Geraden des Kegels (11) erzeugen bei der Bewegung des Dreikants abwickelbare Flächen, aber nur diese und keine zu ihnen parallele. Denn da wir von $a = 0$ und $c = 0$ jetzt absehen, so können die Gleichungen (7) nur erfüllt werden durch

$$a\,\eta_0 = b\,\xi_0, \qquad b\,\zeta_0 = c\,\eta_0,$$

die mit Anwendung von (2) wieder übergehen in

$$a\,\eta = b\,\xi, \qquad b\,\zeta = c\,\eta.$$

Dies sind die Gleichungen der Lösungsgeraden, die also stets durch den Eckpunkt des Dreikants gehen müssen.

Sind beide Krümmungen konstant:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{m}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{n},$$

so wird (6):

$$\frac{c\,(a\,\eta_0 - b\,\xi_0)}{m^2} - \frac{a\,(a\,\eta_0 - b\,\xi_0) + c\,(b\,\zeta_0 - c\,\eta_0)}{m\,n} + \frac{a\,(b\,\zeta_0 - c\,\eta_0)}{n^2} = \frac{a\,c}{m} + \frac{b^2 + c^2}{n}.$$

Hier erfüllen die Bedingung außer den Geraden des Kegels jede zu ihnen parallele in der Ebene:

$$\frac{a\,\eta - b\,\xi}{m} - \frac{b\,\zeta - c\,\eta}{n} - \frac{a\,c\,n - m\,(b^2 + c^2)}{c\,n - a\,m} = 0,$$

die man durch Anwendung von (2) erhält.

Schließlich hätten wir noch die in (1) enthaltenen ebenen Kurven $\left(\frac{1}{r} = 0\right)$ zu betrachten. Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß hier jede der ∞^3 zur Ebene der Kurve parallelen Geraden abwickelbare Flächen erzeugt.

§ 3.

Weitere Untersuchungen über die Cesaroschen Raumkurven, ihre endlichen Gleichungen und Fragen aus der Flächentheorie.

Zunächst sei die Frage erledigt, ob es möglich ist, die Gleichung der Kurven

$$\frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{\rho r} + \frac{C}{r^2} = \frac{D}{\rho} + \frac{E}{r}$$

durch eine andere zu ersetzen, in der statt der Krümmung und Torsion die Bogenlänge und der Kontingenz- und Torsionswinkel auftreten.[1]) Bezeichnen wir den Kontingenzwinkel mit $d\tau$, den Torsionswinkel mit $d\sigma$, so läßt sich die obige Gleichung in der Form schreiben:

$$A\,d\tau^2 + B\,d\tau\,d\sigma + C\,d\sigma^2 - D\,d\tau\,ds - E\,d\sigma\,ds = 0.$$

Angenommen, es besteht eine Beziehung der Form $s = \varphi(\tau, \sigma)$ oder $ds = \frac{\partial s}{\partial \tau}\,d\tau + \frac{\partial s}{\partial \sigma}\,d\sigma$, so erhält man durch Einsetzen dieses Wertes:

$$d\tau^2\left(A - D\frac{\partial s}{\partial \tau}\right) + d\tau\,d\sigma\left(B - D\frac{\partial s}{\partial \sigma} - E\frac{\partial s}{\partial \tau}\right) + d\sigma^2\left(C - E\frac{\partial s}{\partial \sigma}\right) = 0.$$

Diese Gleichung muß identisch erfüllt sein. Setzt man die Koeffizienten Null, so ergibt sich durch Elimination der partiellen Ableitungen aus den drei Gleichungen

$$AE^2 - BDE + CD^2 = 0.$$

Dies ist aber die Bedingung, daß die Kurve eine Bertrandsche wird. Bei den Kurven mit quadratischer Beziehung zwischen den Krümmungen besteht also keine allen Kurven der Klasse gemeinsame Funktion, die die Bogenlänge, den Kontingenz- und Torsionswinkel verbindet.

Zur Untersuchung der gestaltlichen Verhältnisse der betrachteten Kurven ist eine von Moschkowitsch[2]) angewandte

[1]) Lit. 112, S. 55/57.
[2]) Lit. 112, S. 19.

Methode von Vorteil. Er sieht die Gleichung (1) als Gleichung einer ebenen Kurve an mit den Koordinaten $\frac{1}{\rho}$ und $\frac{1}{r}$. Diese Kurve, die also in unserem Falle einen Kegelschnitt, der durch den Anfangspunkt geht, darstellt, bezeichnet er als Indikator der Raumkurve.

Zur weiteren Betrachtung setzen wir $\frac{1}{\rho} = k$, $\frac{1}{r} = t$, dann heißt also die Gleichung des Indikators

$$A k^2 + B k t + C t^2 = D k + E t.$$

Nimmt man die Ebene dieser Kurve als mit der rektifizierenden Ebene der Raumkurve zusammenfallend an, so daß die k-Achse mit der positiven Binormalen, die t-Achse mit der negativen Tangente übereinstimmt, dann sind die Richtungskosinus des vom Nullpunkt aus gezogenen Radiusvektors proportional denen der rektifizierenden Kante, d. h. diese fällt mit dem zugehörigen Radiusvektor zusammen. Die Länge des letzteren ist übrigens durch den Wert der ganzen Krümmung gegeben.

Da die Krümmung einer Kurve stets positiv gerechnet wird, so ist noch ein Wort zu sagen über die Stellen des Indikators, die unterhalb der t-Achse liegen, also scheinbar negative Werte der Krümmung bestimmen. Hat man eine ebene Kurve mit der natürlichen Gleichung $k = f(s)$, so geht der Krümmungsmittelpunkt der Kurve an den Stellen, wo $f(s)$ das Zeichen wechselt, auf die andere Seite der Kurve über. Denkt man sich nun die Raumkurve $k = \pm f(s)$, wo das Vorzeichen so zu wählen ist, daß k positiv ist, durch Torsion der ebenen Kurve entstanden, so würde beim Übergang des Krümmungsmittelpunktes von der einen Seite der Kurve nach der anderen die Hauptnormale ihre positive Richtung ändern, dann geht aber auch die positive Richtung der Binormalen in die entgegengesetzte über.

In dem Punkte, der dem Nullpunkt des Indikators entspricht, verläuft die Raumkurve geradlinig und die Tangente und Schmiegungsebene haben eine Singularität des Stationären. Die Richtung der rektifizierenden Kante in diesem Punkte wird durch die Tangente des Indikators im Nullpunkt bestimmt.

Singuläre Stellen finden sich weiter da, wo der Indikator von den Achsen geschnitten wird, d. h. die Krümmung bzw. Torsion Null sind. Im ersten Falle hat die Kurve eine stationäre Tangente, im zweiten eine stationäre Schmiegungsebene.

Singuläre Punkte sind außerdem vorhanden, wenn der Indikator reelle Asymptoten hat. Ihre Richtung gibt die Lage der rektifizierenden Kante in dem Punkte, wo Krümmung und Torsion unendlich werden. Ist speziell die Asymptote parallel zur Tangente, so ist die Krümmung endlich, die Torsion wird an einer Stelle unendlich; in diesem Punkte existiert eine singuläre Schmiegungsebene. Läuft die Asymptote parallel mit der Binormalen, so ist die Torsion endlich, die Krümmung aber in einem Punkte unendlich, wir haben hier eine singuläre Tangente.

Ist der Indikator eine Parabel, so gilt für ihre Achse Entsprechendes.

Die endlichen Gleichungen der Cesaroschen Raumkurven können wir nach der Methode der parallelen Zuordnung ableiten, wie sie im ersten Abschnitt auf Seite 25 ff. entwickelt wurde. Die dort erhaltenen Formeln (30) liefern uns hier

$$\frac{ds}{ds_1} = \left[\frac{A\cos^2\psi}{\rho_1^2} + \frac{2A\varepsilon\sin\psi\cos\psi}{\rho_1 r_1} + \frac{A\sin^2\psi}{r_1^2} - \frac{B\sin\psi\cos\psi}{\rho_1^2} + \frac{B\varepsilon\cos^2\psi - B\varepsilon\sin^2\psi}{\rho_1 r_1} + \frac{B\sin\psi\cos\psi}{r_1^2} + \frac{C\sin^2\psi}{\rho_1^2} - \frac{2C\varepsilon\sin\psi\cos\psi}{\rho_1 r_1} + \frac{C\cos^2\psi}{r_1^2}\right] \times \frac{1}{\left[\frac{\varepsilon(D\cos\psi - E\sin\psi)}{\rho_1} + \frac{D\sin\psi + E\cos\psi}{r_1}\right]}.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} &A\cos^2\psi - B\sin\psi\cos\psi + C\sin^2\psi = A_1,\\ &\varepsilon[\sin 2\psi\,(A - C) + B\cos 2\psi] = B_1,\\ &A\sin^2\psi + B\sin\psi\cos\psi + C\cos^2\psi = C_1,\\ &\varepsilon(D\cos\psi - E\sin\psi) = D_1,\\ &D\sin\psi + E\cos\psi = E_1, \end{aligned} \tag{22}$$

so wird

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{\frac{A_1}{\rho_1^2} + \frac{B_2}{\rho_1 r_1} + \frac{C_1}{r_1^2}}{\frac{D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}}, \tag{23}$$

also sind die gesuchten endlichen Gleichungen

$$x = \int (\alpha_1 \cos\psi + \varepsilon \lambda_1 \sin\psi) \frac{\frac{A_1}{\rho_1^2} + \frac{B_1}{\rho_1 r_1} + \frac{C_1}{r_1^2}}{\frac{D_1}{\rho_1} + \frac{E_1}{r_1}} ds_1,$$

$$y = \int (\beta_1 \cos\psi + \varepsilon \mu_1 \sin\psi) \frac{\frac{A_1}{\rho_1^2} + \frac{B_1}{\rho_1 r_1} + \frac{C_1}{r_1^2}}{\frac{D_1}{\rho_1} + \frac{E_1}{r_1}} ds_1, \tag{24}$$

$$z = \int (\gamma_1 \cos\psi + \varepsilon \nu_1 \sin\psi) \frac{\frac{A_1}{\rho_1^2} + \frac{B_1}{\rho_1 r_1} + \frac{C_1}{r_1^2}}{\frac{D_1}{\rho_1} + \frac{E_1}{r_1}} ds_1.$$

Bezieht man die beiden Kurven durch parallele Tangenten aufeinander ($\psi = 0$), so erhält man

$$x = \int \frac{\frac{A}{\rho_1^2} + \frac{\varepsilon B}{\rho_1 r_1} + \frac{C}{r_1^2}}{\frac{\varepsilon D}{\rho_1} + \frac{C}{r_1}} dx_1 \tag{25}$$

und die entsprechenden Ausdrücke für y und z.

Die letzten Gleichungen können noch in eine andere Form gebracht werden, die es gestattet, für diese Kurven einen entsprechenden Satz aufzustellen, wie wir ihn für Bertrandsche Kurven hatten. Es ist

$$\left(\frac{A}{\rho_1^2} + \frac{\varepsilon B}{\rho_1 r_1} + \frac{C}{r_1^2}\right) : \left(\frac{\varepsilon D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}\right) = \frac{A_0}{\rho_1} + \frac{B_0}{r_1} + \frac{\frac{C_0}{\rho_1 r_1}}{\frac{\varepsilon D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}},$$

wo

$$A_0 = \frac{A}{\varepsilon D}, \quad B_0 = \frac{C}{E}, \quad C_0 = \frac{BDE - AE^2 - CD^2}{\varepsilon DE},$$

oder

$$= \frac{a_0}{\rho_1} + \frac{b_0}{r_1} + \frac{\frac{c_0}{r_1^2}}{\frac{\varepsilon D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}},$$

wo

$$a_0 = \frac{A}{\varepsilon D},\quad b_0 = \frac{BD - AE}{D^2},\quad c_0 = \frac{AE^2 - BDE + CD^2}{D^2}.$$

Die endlichen Gleichungen der Cesaroschen Raumkurven bezogen auf eine zweite Kurve mit parallelen Tangenten sind also:

$$(25a)\qquad x = \int \left(\frac{A_0}{\rho_1} + \frac{B_0}{r_1}\right) dx_1 + \int \frac{\frac{C_0}{\rho_1 r_1}}{\frac{\varepsilon D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}}\, dx_1$$

und zwei entsprechende. Hier stellt der erste Summand eine Bertrandsche Kurve, der zweite eine Kurve $p_1 \rho + p_2 r = p_3$ (wo p_1, p_2, p_3 Konstante sind) dar.

Oder in der anderen Form:

$$(25b)\qquad x = \int \left(\frac{a_0}{\rho_1} + \frac{b_0}{r_1}\right) dx_1 + \int \frac{\frac{c_0}{r_1^2}}{\frac{\varepsilon D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}}\, dx_1,$$

wo der erste Summand wieder eine Bertrandsche Kurve, der zweite eine der Klasse $\frac{q_1}{\rho} + \frac{q_2}{r} = \frac{q_3}{r^2}$ ist.

Wir haben damit einen von Salkowski[1]) gefundenen Satz in erweiterter Form:

Bezieht man eine Bertrandsche Kurve und eine Kurve, deren Krümmungsradius eine lineare ganze Funktion des Torsionsradius ist, oder eine Bertrandsche Kurve und eine Kurve der Klasse $\frac{q_1}{\rho} + \frac{q_2}{r} = \frac{q_3}{r^2}$ durch parallele Tangenten aufeinander, so liegen alle Punkte, die die Verbindungslinien entsprechender Punkte der zusammengehörigen Kurven in einem beliebigen konstanten Verhältnis teilen, auf einer allgemeinen Cesaroschen Raumkurve.

Eine weitere Konstruktion der allgemeinen Kurven aus speziellen erhält man mit Moschkowitsch[2]), wenn man die Gleichungen (25) in der Form schreibt:

[1]) Lit. 109, S. 527.
[2]) Lit. 112, S. 30.

$$x = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3A}{\rho_1^2}}{\frac{\varepsilon D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}}\, dx_1 + \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3\varepsilon B}{\rho_1 r_1}}{\frac{\varepsilon D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}}\, dx_1$$

$$+ \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3C}{r_1^2}}{\frac{\varepsilon D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}}\, dx_1$$

und die entsprechenden.

Diese liefern sofort den Satz: Sind drei Raumkurven mit den bezw. natürlichen Gleichungen

$$\frac{3A}{\rho^2} = \frac{D}{\rho} + \frac{E}{r},$$
$$\frac{3B}{\rho r} = \frac{D}{\rho} + \frac{E}{r},$$
$$\frac{3C}{r^2} = \frac{D}{\rho} + \frac{E}{r}$$

einander durch parallele Tangenten zugeordnet, so liegen die Schwerpunkte aller Dreiecke, deren Ecken entsprechende Punkte der drei Kurven sind, auf einer allgemeinen Cesaroschen Raumkurve.

Wir wollen noch die Bedeutung der bei der Methode der parallelen Zuordnung auftretenden Formeln in der Indikatorebene betrachten, wobei wir der Einfachheit wegen $\varepsilon = +1$ annehmen.

Die Formeln (30) des ersten Abschnittes (S. 26) stellen dar eine Drehung des Indikators um den Nullpunkt um den Winkel ψ und eine Streckung von diesem Punkte aus im Verhältnis $\frac{ds_1}{ds}$. Die Größen A_1, B_1, ... der Gleichungen (24) erhält man nach (22), indem man den Indikator der gesuchten Kurve um den Nullpunkt um den Winkel ψ dreht und für A_1, B_1, ... die Koeffizienten der erhaltenen Kurvengleichung einsetzt.

Hat man also eine Kurve

$$\frac{A_1'}{\rho^2} + \frac{B_1'}{\rho r} + \frac{C_1'}{r^2} = \frac{D_1'}{\rho} + \frac{E_1'}{r}, \tag{26}$$

deren Indikator aus dem der Kurve (1) dadurch hervorgeht, daß man diesen um den Winkel $-\Psi$ dreht, so kommt man zu den Größen A_1', B_1', ..., indem man in (22) ψ durch $-\Psi$ ersetzt.

Die endlichen Gleichungen der Kurven (26) ergeben sich wie (24):

$$x = \int (\alpha_1 \cos \psi + \lambda_1 \sin \psi) \frac{\frac{A_0'}{\rho_1^2} + \frac{B_0'}{\rho_1 r_1} + \frac{C_0'}{r_1^2}}{\frac{D_0'}{\rho_1} + \frac{E_0'}{r_1}} \, ds_1$$

usw.

Wird $\Psi = \psi$, so stimmen die Größen A_0', B_0', ... mit den A, B, ... überein, die Gleichungen

$$x = \int (\alpha_1 \cos \Psi + \lambda_1 \sin \Psi) \frac{\frac{A}{\rho_1^2} + \frac{B}{\rho_1 r_1} + \frac{C}{r_1^2}}{\frac{D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}} \, ds_1$$

usw.

stellen also die endlichen Gleichungen der Kurven (26) dar, deren Indikator aus dem der Kurve (1) durch eine Drehung im Betrage $-\Psi$ hervorgeht und die einer anderen Kurve durch parallele Hauptnormalen zugeordnet ist.

Läßt man den Winkel Ψ alle Werte von 0 bis 2π durchlaufen, so erhält man eine Schar von Cesaroschen Raumkurven, deren Indikator nicht mehr übereinstimmt, denen aber eine andere gemeinsame Eigenschaft zukommt. Führt man statt Ψ einen Winkel $\Psi + \omega$ ein, so hat man den Indikator einer Drehung $-\omega$ zu unterziehen. Um bei positiven Werten von Ψ auch positive Drehungen des Indikators zu erhalten, drehen wir das Vorzeichen von Ψ um und erhalten so die Gleichungen einer Schar von Cesaroschen Raumkurven

$$x = \int (\alpha_1 \cos \Psi - \lambda_1 \sin \Psi) \frac{\frac{A}{\rho_1^2} + \frac{B}{\rho_1 r_1} + \frac{C}{r_1^2}}{\frac{D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}} \, ds_1$$

usw.

Da das Verhältnis des Bogenelements dieser Kurve zu dem der Bezugskurve

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{\frac{A}{\rho_1^2} + \frac{B}{\rho_1 r_1} + \frac{C}{r_1^2}}{\frac{D}{\rho_1} + \frac{E}{r_1}}$$

von Ψ frei ist, so haben alle Kurven der Schar gleiche Bogenelemente. Wir können sie daher aus einer von ihnen ableiten, indem wir durch diese eine Fläche legen, die sie als geodätische Linie enthält, und diese Fläche dann auf alle mögliche Art verbiegen, so, daß ihre sämtlichen Normalen ihre Richtung behalten; die Fläche muß also eine Minimalfläche sein.

Hierdurch wird man zur Frage geführt, ob es Minimalflächen gibt, deren sämtliche geodätischen Linien Cesarosche Raumkurven oder ein Spezialfall dieser sind.

Moschkowitsch[1]), der hierüber Untersuchungen angestellt hat, kommt dabei zum Ergebnis, daß dies nicht der Fall ist. Da sich bei der Ableitung auch sonst keine bemerkenswerten Resultate ergeben, so sei diese hier übergangen.

Ebenso kommen auch geodätische Linien, die einer durch (1) bestimmten Klasse von Kurven angehören, auf Minimalflächen niemals in reellen Scharen vor.

Auch die Frage, ob es überhaupt Flächen gibt, auf denen sämtliche geodätischen Linien Cesarosche Raumkurven sind, ist, von einigen trivialen Fällen abgesehen (Ebene, Kreiszylinder, Kugel) zu verneinen.

§ 4.

Die Beziehung $\frac{a}{\rho^2} + \frac{b}{r^2} = \frac{1}{\rho}$.

Wie ich schon am Schlusse des ersten Abschnittes bemerkte, ist eine naheliegende Verallgemeinerung der Bertrandschen Kurven, alle Kurven zu bestimmen, bei denen die Hauptnormale mit der Binormalen einer zweiten Kurve zusammenfällt. Diese können wir wieder aus dem allgemeineren Fall ableiten, wo eine beliebige Normale einer Kurve, die mit der Hauptnormalen einen konstanten Winkel θ bildet, Binormale einer zweiten Kurve ist.

Diese Frage wurde zuerst von Pirondini[2]) und Balitrand[3]) behandelt. Pirondini betrachtet die Fläche, die die

[1]) S. 36 ff.
[2]) Lit. 93.
[3]) Lit. 94.

Gerade beschreibt, wobei er zunächst den Winkel θ als veränderlich nimmt, Balitrand löst die Aufgabe mit den Methoden der natürlichen Geometrie. Weiterhin wurde das Problem von Cesaro[1]) und von Hatzidakis[2]) in Angriff genommen, die die Gleichung, der die Krümmungen der Kurve genügen müssen, mit Hilfe kinematischer Betrachtungen erhielten.

Die Resultate wollen wir hier auf dem gewöhnlichen analytischen Wege ableiten, wobei sich auch einige neue Eigenschaften der Kurven ergeben werden.

Ist eine Kurve C gegeben

(1) $$x = f_1(s), \qquad y = f_2(s), \qquad z = f_3(s)$$

und zieht man in der Normalebene eine gegen die Hauptnormale um den Winkel θ geneigte Gerade d, auf der man eine Strecke $u = \varphi(s)$ abträgt, so bilden die Endpunkte eine neue Kurve C_1, deren Koordinaten sind:

(2) $$x_1 = x + u\,(l\cos\theta + \lambda\sin\theta)$$

und zwei entsprechende.

Hieraus erhält man

$$\frac{dx_1}{ds} = \alpha + \frac{du}{ds}(l\cos\theta + \lambda\sin\theta) - u\cos\theta\left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{r}\right) + u\sin\theta\,\frac{l}{r},$$

oder

(4) $$\frac{dx_1}{ds_1} = \alpha_1 = \left[\alpha\left(1 - u\,\frac{\cos\theta}{\rho}\right) + l\left(\frac{du}{ds}\cos\theta + \frac{u\sin\theta}{r}\right) + \lambda\left(\frac{du}{ds}\sin\theta - \frac{u\cos\theta}{r}\right)\right]\frac{ds}{ds_1}.$$

Die Gerade α soll Binormale der Kurve C_1 sein heißt, sie soll zu den Tangenten dieser Kurve senkrecht stehen, also

$$\Sigma\,\alpha_1\,(l\cos\theta + \lambda\sin\theta) = 0.$$

Ausgerechnet ergibt dies

$$\frac{du}{ds} = 0$$

oder

(5) $$u = \text{konst.},$$

[1]) Lit. 98, S. 5/11.
[2]) Lit. 99.

daher gilt

Satz 1: Der Abstand beider Kurven ist konstant.

Aus (4) folgt dann durch Quadrieren und Addieren der drei Gleichungen:

$$(6) \qquad \frac{ds_1}{ds} = \sqrt{\left(1 - \frac{u\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \frac{u^2}{r^2}}.$$

Für die Richtungskosinus der Tangente der zweiten Kurve haben wir dann

$$\alpha_1 = \frac{\alpha\left(1 - \frac{u\cos\theta}{\rho}\right) + l\,\frac{u\sin\theta}{r} - \lambda\,\frac{u\cos\theta}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{u\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \frac{u^2}{r^2}}} \text{ usw.,}$$

oder wenn zur Abkürzung

$$\frac{1 - \frac{u\cos\theta}{\rho}}{\sqrt{\left(1 - \frac{u\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \frac{u^2}{r^2}}} = p, \quad \frac{\frac{u\sin\theta}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{u\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \frac{u^2}{r^2}}} = q,$$

$$\frac{\frac{u\cos\theta}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{u\cos\theta}{\rho}\right)^2 + \frac{u^2}{r^2}}} = t$$

gesetzt wird:

$$\alpha_1 = \alpha\, p + l\, q - \lambda\, t.$$

Differenziert man wieder nach s, so erhält man

$$\frac{d\,\alpha_1}{ds} = \frac{l}{\rho}\,p - \left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{r}\right) q - \frac{l}{r}\,t + \alpha\,\frac{dp}{ds} + l\,\frac{dq}{ds} - \lambda\,\frac{dt}{ds},$$

oder

$$\frac{d\,\alpha_1}{ds_1} = \frac{l_1}{\rho_1} = \left[l\left(\frac{p}{\rho} - \frac{t}{r} + \frac{dq}{ds}\right) - \alpha\left(\frac{q}{\rho} - \frac{dp}{ds}\right) - \lambda\left(\frac{q}{r} + \frac{dt}{ds}\right)\right]\frac{ds}{ds_1} \text{ usw.}$$

Da die Gerade d mit der Binormalen von C_1 zusammenfallen soll, so muß sie zur Hauptnormalen dieser Kurve senkrecht sein, also

$$\Sigma \frac{d\alpha_1}{ds_1} (l \cos\theta + \lambda \sin\theta) = 0.$$

Diese Bedingung gibt

$$\cos\theta \left(\frac{p}{\rho} - \frac{t}{r} + \frac{dq}{ds}\right) - \sin\theta \left(\frac{q}{r} + \frac{dt}{ds}\right) = 0.$$

Da aber

$$\cos\theta \frac{dq}{ds} = \sin\theta \frac{dt}{ds},$$

so wird

$$\cos\theta \left(\frac{p}{\rho} - \frac{t}{r}\right) - \sin\theta \cdot \frac{q}{r} = 0$$

oder, wenn man für p, q, t wieder ihre Werte einsetzt:

$$\frac{u \cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{\cos\theta}{\rho}, \tag{7}$$

also:

Satz 2: Zwischen den Krümmungen der Kurve C muß die Beziehung

$$\frac{u \cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{\cos\theta}{\rho}$$

bestehen.

Das Verhältnis der Bogenelemente wird jetzt

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{1 - \frac{u \cos\theta}{\rho}} = \sqrt{\frac{u\rho}{r^2 \cos\theta}}. \tag{8}$$

Wie man hieraus sieht, muß $u \cos\theta \leqq \rho$ sein, um reelle Kurven zu erhalten.

Nun ist es nicht schwer, die Elemente der Kurve C_1 in ihrer Abhängigkeit von denen der ersten zu bestimmen.

Die Krümmung erhalten wir aus den Richtungskosinus der Tangente:

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{\cos\theta \frac{d\frac{r}{\rho}}{ds}}{\sqrt{1 - \frac{u\cos\theta}{\rho}\left(1 + \frac{r^2\cos^2\theta}{\rho^2}\right)}} \tag{9}$$

$$= -\frac{u\rho \frac{d\frac{r}{\rho}}{ds}}{r^2\sqrt{1 - \frac{u\cos\theta}{\rho}}}.$$

Die Torsion erhält man am einfachsten, wenn man von der zweiten Kurve ausgeht. Da die Kurve C auf den Binormalen von C_1 die konstante Strecke u abschneidet, so sind ihre Koordinaten

(10) $$x = x_1 + u\,\lambda_1 \qquad \text{usw.},$$

dann ist

$$\frac{dx}{ds_1} = \alpha_1 + u\,\frac{l_1}{r_1},$$

also

(11) $$\frac{ds}{ds_1} = \sqrt{1 + \frac{u^2}{r_1^2}}.$$

Faßt man diese mit (8) zusammen, so wird:

(12) $$\sqrt{1 + \frac{u^2}{r_1^2}}\,\sqrt{1 - \frac{u\cos\theta}{\rho}} = 1,$$

$$\frac{1}{r_1} = \sqrt{\frac{\cos\theta}{u\,(\rho - u\cos\theta)}},$$ [1])

oder wenn man für $\frac{ds}{ds_1}$ den zweiten Wert von (8) nimmt, so erhält man

(13) $$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{r^2\cos\theta}{u\,\rho} - 1}.$$

Eliminiert man aus (12) und (13) ρ, so ergibt sich eine Beziehung zwischen den beiden Torsionsradien:

(14) $$r = \frac{u^2}{r_1} + r_1.$$

Das Produkt der beiden Torsionsradien wird

(15) $$r\,r_1 = \frac{u\,\rho}{\cos\theta}.$$

Aus (8) und (15) erhalten wir weiter

$$\rho = \cos\theta\left(u + \frac{r_1^2}{u}\right).$$

---

[1]) Bei Balitrand befindet sich hier ein Irrtum, der auch in Joachimi, Diss. Münster 1911, S. 26, mit übergegangen ist.

Durch Zusammenfassung von (11) und (14) folgt

$$\frac{ds}{ds_1} = \sqrt{\frac{r}{r_1}},$$

also

Satz 3: Die Quadrate der Bogenelemente beider Kurven verhalten sich wie ihre Torsionsradien.[1])

Um die natürliche Gleichung der Kurve C_1 zu erhalten, kombinieren wir die Gleichungen (8), (9), (12) und (15):

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{r_1^2}{u^2 + r_1^2} \cdot \frac{d\,\frac{u}{r_1}}{ds_1},$$

oder

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{d\,\operatorname{arctg}\frac{u}{r_1}}{ds_1}.$$

Satz 4: Die natürliche Gleichung der Kurve C_1 lautet:

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{d\,\operatorname{arctg}\frac{u}{r_1}}{ds_1},$$

oder

$$\frac{u}{r_1} + \operatorname{tg}\int \frac{ds_1}{\rho_1} = 0. \tag{16}$$

Diese hätten wir auch direkt aus (10) ableiten können. Den Abstand der Striktionslinie der von den Geraden d gebildeten Fläche von der Kurve C erhalten wir nach der Formel:

$$u_0 = -\frac{\Sigma\left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d\,(l\cos\theta + \lambda\sin\theta)}{ds}\right)}{\Sigma\left(\frac{d\,(l\cos\theta + \lambda\sin\theta)}{ds}\right)^2},$$

$$u_0 = \frac{\frac{\cos\theta}{\rho}}{\frac{\cos^2\theta}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (7), so sehen wir, daß

$$u_0 = u$$

ist, und wir haben den

---

[1]) Denselben Satz hatten wir für Bertrandsche Kurven, s. S. 16.

Satz 5: Die Kurve C_1 ist die Striktionslinie der von den um den Winkel θ gegen die Hauptnormalen von C geneigten Normalen d gebildeten Fläche.

Ein Beispiel für die hier betrachteten Kurven findet sich bei Voß [1]) bei der Untersuchung kongruenter Kurvenpaare, die mit entsprechenden Punkten aufeinander bezogen sind, d. h. von Kurven, bei denen in jedem Punkte

$$ds = ds', \quad \rho = \rho', \quad r = r'$$

ist. Er hat den Satz gefunden: Alle Kurvenpaare, die aus zwei kongruenten mit entsprechenden Punkten aufeinander durch gemeinsame Normalen von konstanter Länge k bezogenen Kurven bestehen, ergeben sich, wenn man auf einem Kreiszylinder mit dem Durchmesser k eine willkürliche Kurve C annimmt. Die Kurve C' wird dann von den Punkten des Zylinders gebildet, in denen die aus den Punkten von C auf die Achse des Zylinders gezogenen Senkrechten den Zylinder schneiden.

In einer Anmerkung dazu bestimmt er die aus kongruenten Kurven bestehenden Paare, deren Hauptnormalen mit der gemeinsamen Normalen den konstanten Winkel w bilden, durch den Ansatz:

$$x = k \cos \varphi, \qquad y = k \sin \varphi, \qquad z = F,$$

wobei er aus den angegebenen Bedingungen F bestimmt:

$$z = \frac{k}{2c}\left(e^{c \cdot \varphi} + e^{-c\varphi}\right).$$

Das gesuchte Kurvenpaar ergibt sich daher durch Aufwickelung einer gewöhnlichen Kettenlinie auf einen Kreiszylinder.

Für den Fall $c = 1$ sind die Elemente dieser Kurve von Joachimi [2]) berechnet worden. Dabei ergibt sich:

$$s = \frac{k}{2}\left(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right),$$

$$(17) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{4\sqrt{2}}{k\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)^2} = \frac{k\sqrt{2}}{s^2 + k^2},$$

$$\frac{1}{r} = -\frac{2\left(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right)}{k\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)^2} = \frac{-s}{s^2 + k^2}.$$

[1]) Lit. 105, S. 29.
[2]) Lit. 108, S. 26/30.

Durch Elimination von s erhält man die quadratische Beziehung:

$$\frac{\frac{k}{\sqrt{2}}}{\rho^2} + \frac{k}{r^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\rho}.$$

Die Normale der Kurve ist also um 45^0 gegen die Hauptnormale geneigt.

Für die zugeordnete Kurve erhält man nach (8), (9) und (12):

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}},$$

$$\frac{1}{\rho_1} = -\frac{4}{k\left(e^{2\varphi} - e^{-2\varphi}\right)}, \tag{18}$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{2}{k\left(e^{\varphi} - e^{-\varphi}\right)}.$$

Der Radius der Schmiegungskugel der ersten Kurve ist:

$$R = \sqrt{\rho^2 + r^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2},$$

$$R = \rho\sqrt{5},^{1})$$

also proportional dem Krümmungsradius.

Aus (17) folgt noch

$$\frac{\rho}{r} = -\frac{s}{k\sqrt{2}},$$

d. h. die erste Kurve ist geodätische Linie auf einem Kegel.

Eliminiert man aus der ersten Gleichung (18) mit Hilfe von (17) φ, so wird

$$\frac{ds_1}{ds} = \frac{s}{\sqrt{s^2 + k^2}},$$

$$s_1 = \sqrt{s^2 + k^2} = \frac{k}{2}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)$$

---

[1]) Die von Joachimi S. 28 angegebene Eigenschaft, daß sich die Krümmungsradien der Schmiegungskugelmittelpunktskurve umgekehrt verhalten wie die Radien der Ausgangskurve, gilt allgemein (s. Schell, 1898, S. 66).

und $$\frac{\rho_1}{r_1} = -\frac{s_1}{k},$$

d. h. auch die zweite Kurve ist geodätische Linie eines Kegels.

Zum Schlusse sei noch auf ähnliche Untersuchungen von Hatzidakis[1]) hingewiesen, die als eine eigentliche Erweiterung der Bertrandschen Relation anzusehen sind. Wir hatten uns hier die Frage gestellt, wann eine Normale, die mit der Hauptnormalen einer Kurve einen konstanten Winkel θ bildet, Binormale einer zweiten Kurve ist.

Soll diese Normale nun Hauptnormale einer zweiten Kurve sein, so muß nach Hatzidakis zwischen den Krümmungen der ersten Kurve die Beziehung bestehen:

$$\frac{r^2}{u\rho}\sin\theta\left[\left(1-\frac{u\cos\theta}{\rho}\right)^2+\frac{u^2}{r^2}\right] = -\frac{dr}{ds} - \frac{u\cos\theta}{\rho^2}\left[r\frac{d\rho}{ds}-\rho\frac{dr}{ds}\right],$$

wo u wieder der konstante Abstand beider Kurven ist. Die Krümmungen der zweiten Kurve sind

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\frac{\cos\theta}{\rho}-u\left(\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}\right)}{\left(1-\frac{u\cos\theta}{\rho}\right)^2+\frac{u^2}{r^2}},$$

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r\left[\left(1-\frac{u\cos\theta}{\rho}\right)^2+\frac{u^2}{r^2}\right]}.$$

Als Spezialfälle erhält man hieraus

1. für $\theta = 0$ die Bertrandschen Kurven

$$\frac{dr}{ds} = -\frac{a}{\rho^2}\left(r\frac{d\rho}{ds}-\rho\frac{dr}{ds}\right),$$

oder integriert

$$1 = \frac{a}{\rho}+\frac{b}{r};$$

2. für $\theta = \frac{\pi}{2}$ die Kurven, deren Binormalen mit den Hauptnormalen einer zweiten Kurve zusammenfallen. Diese werden im nächsten Paragraphen behandelt.

[1]) Lit. 99.

Die Kurven, bei denen eine Normale, die mit der Hauptnormalen einen konstanten Winkel bildet, Hauptnormale einer zweiten Kurve ist, sind vor Hatzidakis bereits von Pellet[1]) und Cesaro[2]) betrachtet worden. Um ein Beispiel für diese Kurven zu haben, nehmen sie die zugeordnete als Gerade. Die natürlichen Gleichungen der ersten erhält man dann in der Form:

$$\rho = u \cos\theta + \frac{s^2 \sin^2\theta}{u \cos\theta},$$

$$\frac{r}{\rho} = \frac{u}{s \sin\theta}.$$

Sie ist also geodätische eines Kegels, dessen Spitze der Schnittpunkt der rektifizierenden Ebene mit der Geraden ist. Entsprechende Punkte der Kurve und der zugeordneten Geraden bleiben immer im konstanten Abstande u; man kann daher auch sagen, die Kurve liegt auf einem Kreiszylinder mit dem Radius u, dessen Achse die Gerade ist.

Wickelt man den Zylinder in die Ebene ab, so geht die Kurve in eine ebene mit der Krümmung $\frac{1}{\rho_0}$ über, deren Wert gegeben ist durch

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_0^2} + \frac{\cos^4\varphi}{u^2},$$

wo φ der Winkel ist, den die Tangenten der ebenen Kurve mit den Geraden bilden, die bei der Aufwickelung in Kreise übergehen.

Ist die transformierte Kurve eine Kettenlinie mit der natürlichen Gleichung

$$\rho_0 = k + \frac{s_0^2}{k},$$

so ist $\cos^2\varphi = \frac{k}{\rho_0}$, wenn die Direktrix längs eines Kreises rollt. Die Gleichung zwischen $\frac{1}{\rho}$ und $\frac{1}{\rho_0}$ geht dann über in

$$\rho = \frac{u\,\rho_0}{\sqrt{u^2 + k^2}}, \qquad s = s_0.$$

[1]) Lit. 87. Hier sind nur die Resultate angegeben.
[2]) Lit. 88.

Die Gleichung der Kettenlinie wird

$$\rho = \frac{u}{\sqrt{u^2 + k^2}} \left(k + \frac{s^2}{k} \right).$$

Setzt man hierin $\frac{k}{u} = \operatorname{cotg} \theta$, so geht sie über in die oben (S. 88) gefundene erste natürliche Gleichung unserer Raumkurve. Man kann daher das Resultat auch so aussprechen:

Man erhält die gesuchte Kurve, indem man eine Kettenlinie vom Parameter $k = u \operatorname{cotg} \theta$ auf einen Kreiszylinder vom Radius u aufwickelt, wobei die Achse der Kurve längs der Erzeugenden des Zylinders geleitet wird. Die Leitlinie geht dabei in einen Kreis über, der den Scheitel des rektifizierenden Kegels der Kurve zum Mittelpunkt hat.

§ 5.

Die Beziehung $\frac{u}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\rho}$.

Ein besonders interessanter Spezialfall, der am Anfang des vorigen Paragraphen behandelten Kurvenbeziehung, ist der Fall $\theta = 0$, d. h. die Kurven, deren Hauptnormalen mit den Binormalen einer zweiten Kurve zusammenfallen. Da die auf S. 80 bis 85 entwickelten Formeln für $\theta = 0$ ihre Richtigkeit behalten, so erübrigt es sich, sie aus dieser Bedingung von neuem abzuleiten.

Die Gleichungen (7) und (16) des vorigen Paragraphen gehen über in

$$\frac{u}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\rho}, \tag{1}$$

oder

$$u = \frac{r^2 \rho}{\rho^2 + r^2}$$

und

$$\frac{1}{\rho_1} = - \frac{d \operatorname{arctg} \frac{u}{r_1}}{ds_1}. \tag{2}$$

Daher gilt der

Satz 1: Soll die Hauptnormalenfläche einer Kurve C gleichzeitig Binormalenfläche einer anderen Kurve C_1 sein, so muß

zwischen den Krümmungen von C die Beziehung (1), zwischen denen von C_1 die Beziehung (2) gelten, wo u der konstante Abstand beider Kurven ist.[1])

Nun ist $\frac{r^2 \rho}{\rho^2 + r^2}$ der Abstand der Punkte der Striktionslinie der Hauptnormalenfläche von der Grundkurve; dieser ist also hier konstant und wir haben:

Satz 2: Die Kurve C_1 fällt mit der Striktionslinie der Hauptnormalenfläche von C zusammen.

Satz 3: Besteht zwischen den Krümmungen einer Kurve C die Beziehung (1), so ist die Striktionslinie ihrer Hauptnormalenfläche eine orthogonale Trajektorie der Erzeugenden der Fläche.[2])

Der kürzeste Abstand zweier benachbarter Schraubungsachsen ist du, ihr Winkel dH, wo H der Winkel der rektifizierenden Kante gegen die Tangente ist. Eine windschiefe Regelfläche kann auf zwei Arten in eine abwickelbare übergehen, erstens dadurch, daß der Abstand zweier benachbarten Erzeugenden Null wird, oder zweitens dadurch, daß der Winkel verschwindet. Die Fläche der Schraubungsachsen wird also abwickelbar für

$$du = 0 \qquad \text{oder} \qquad dH = 0.$$

Der zweite Fall liefert die Schraubenlinien. Der erste Fall gibt wieder

$$u = \text{konst.}$$

Daher

Satz 4:[3]) Wenn die Schraubungsachse eine abwickelbare Fläche beschreiben soll, so muß zwischen den Krümmungen der Kurve

---

[1]) Von den quadratischen Beziehungen tritt diese als erste auf und zwar nicht bei Mannheim, wie Joachimi (Lit. 108, S. 2) angibt, sondern bereits fünf Jahre vorher bei Laurent (Lit. 82), der sie auf anderem Wege erhält (s. unten). Die Frage nach den Kurven, deren Hauptnormalen mit den Binormalen einer zweiten zusammenfallen, stellte zuerst Pirondini, Lit. 86.

[2]) Mannheim: Lit. 83, S. 848/49.

[3]) Laurent: Lit. 82, erhielt als Bedingung, wenn eine Gerade durch die Hauptnormale parallel zur Achse der Schmiegungsschraubenlinie eine abwickelbare Fläche beschreiben soll, daß ihr Abstand von der Kurve konstant sein muß. Da die Schraubungsachse auch die gestellten Bedingungen erfüllt und ihr Abstand von der Kurve $\frac{r^2 \rho}{\rho^2 + r^2}$ ist, so kommt er zu diesem Satze. (s. Anm. 1, S. 98). Später wurde er von Cesaro: Lit. 85, neu gefunden.

die Beziehung (1) bestehen, und zwar ist die abwickelbare Fläche die Tangentenfläche der Striktionslinie der Hauptnormalenfläche dieser Kurve.

Dieser Satz läßt sich auch sehr einfach durch analoge Rechnungen beweisen, wie sie auf S. 55 durchgeführt wurden.

Ist eine Kurve durch ihre Gleichungen gegeben:

$$x = f_1(s), \qquad y = f_2(s), \qquad r = f_3(s)$$

und sind a, b, c die Richtungskosinus der Schraubungsachse, so können wir ihre Gleichung darstellen durch

$$\frac{X - \xi}{a} = \frac{Y - \eta}{b} = \frac{Z - \zeta}{c},$$

wo

$$\xi = x + u\,l, \quad \eta = y + u\,m, \quad \zeta = z + u\,n.$$

Die Bedingung für die Abwickelbarkeit der erzeugten Fläche ist hier

$$\begin{vmatrix} d\xi & a & da \\ d\eta & b & db \\ d\zeta & c & dc \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$d\xi \begin{vmatrix} b & db \\ c & dc \end{vmatrix} + d\eta \begin{vmatrix} c & dc \\ a & da \end{vmatrix} + d\zeta \begin{vmatrix} a & da \\ b & db \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir den Winkel zweier benachbarter Schraubungsachsen wieder mit dH, so ist, da die Hauptnormale senkrecht zu diesen beiden Achsen ist:

$$l\,dH = \begin{vmatrix} b & db \\ c & dc \end{vmatrix}, \qquad m\,dH = \begin{vmatrix} c & dc \\ a & da \end{vmatrix},$$

$$n\,dH = \begin{vmatrix} a & da \\ b & db \end{vmatrix}.$$

Außerdem ist

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha - \left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{r}\right) u + l\,du \qquad \text{usw.}$$

Setzen wir diese Werte in die Bedingungsgleichung ein, so geht sie über in:

$$\Sigma\, l\,dH \left[\alpha - \left(\frac{\alpha}{\rho} + \frac{\lambda}{r}\right) u + l\,du\right] = 0$$

oder

$$du\,dH = 0.$$

1. $dH = 0$; $H =$ konst. bestimmt die Schraubenlinien,
2. $du = 0$; $u =$ konst. gibt die Beziehung (1).

Ehe wir die weiteren Eigenschaften der interessanten Kurven betrachten, wollen wir erst noch auf eine wesentlich andere Ableitung der Relation von Mannheim[1]) eingehen.

Auf S. 21 hatten wir die Mannheimsche Hilfsgerade

$$\frac{v}{\rho} + \frac{u}{r} = 1$$

betrachtet und gefragt, welche Beziehung zwischen den Krümmungen der Kurve bestehen muß, wenn die Enveloppe dieser Geraden ein Punkt ist. Dabei hatten wir die Bertrandschen Kurven erhalten. Soll die Enveloppe dagegen eine Parabel sein, deren Achse die v-Achse ist und deren Brennpunkt in den Koordinatenanfangspunkt fällt:

$$u^2 + 2pv - p^2 = 0,$$

so ergibt sich eine Beziehung zweiten Grades.

Die Gleichung der Tangente im Punkte (u_o, v_o) ist:

$$u u_o + p v + p v_o - p^2 = 0,$$

also

$$\frac{1}{r} = \frac{u_o}{p(p - v_o)}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p - v_o},$$

oder

$$u_o = \frac{p\rho}{r}, \qquad v_o = p - \rho.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichung der Parabel ein, so wird

$$\frac{p}{\rho^2} + \frac{p}{r^2} = \frac{2}{\rho}.$$

Joachimi[2]) berechnet noch die Richtungskosinus der Normalen der Hauptnormalenfläche und erhält, daß der zu v gehörende Radiusvektor mit der u-Achse entweder denselben Winkel wie die Normale mit der Binormalen der Kurve bildet, oder seinen Komplementwinkel.

Aus den auf S. 80/83 entwickelten Formeln erhalten wir noch für $\theta = 0$:

---

[1]) Lit. 83 und Lit. 78; siehe auch die Anmerkung S. 90.
[2]) Lit. 108, S. 5 u. 6.

$$\frac{ds_1}{ds} = \sqrt{1 - \frac{u}{\rho}} = \frac{\sqrt{u\,\rho}}{r}.$$

Hieraus liest man sofort wieder die bekannte Tatsache ab, daß der Abstand der Striktionslinie der Hauptnormalenfläche von der Kurve $\leqq \rho$ ist.

Die Krümmung der zweiten Kurve wird

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{-\rho^2 \frac{d\,\frac{r}{\rho}}{ds}}{(\rho^2 + r^2)\sqrt{1 - \frac{u}{\rho}}} = \frac{\frac{d\,\rho}{ds} \cdot \frac{r^2}{\rho^2}}{2\sqrt{u\,\rho}}$$

oder mit Einführung des Winkels H der rektifizierenden Kante gegen die Tangente, wo

$$\operatorname{tg} H = -\frac{r}{\rho}$$

ist, da $\frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{u\,\rho}}{r}$:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{r}{\sqrt{u\,\rho}} \frac{d\,H}{ds} = \frac{1}{\cos H} \frac{d\,H}{ds}$$

oder:

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\,H}{ds_1}.$$

Für die Torsion erhalten wir

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{u\,(\rho - u)}} = \frac{1}{u}\sqrt{\frac{r^2}{u\,\rho} - 1}$$

oder wie oben

$$\frac{1}{r_1} = -\frac{\operatorname{tg} H}{u},$$

$$r = \frac{u^2}{r_1} + r_1,$$

$$\rho = u + \frac{r_1^2}{u},$$

$$r\,r_1 = u\,\rho.$$

Setzen wir in der letzten Formel für u seinen Wert ein, so ergibt sich

$$r_1 = \frac{r\,\rho^2}{\rho^2 + r^2},$$

d. h. der Torsionsradius der Kurve C_1 ist gleich dem Windungsparameter von C mit umgekehrtem Vorzeichen.

Schließlich wollen wir noch eine Konstruktion angeben, die die zu den beiden Kurven gehörenden Elemente liefert (s. Figur 6).

Man konstruiert zunächst das rechtwinkelige Dreieck AEC aus der Höhe u und dem Winkel $H = -\operatorname{arctg}\frac{r}{\rho}$.

Dann errichtet man zu AC in C die Senkrechte und erhält die Punkte B und F als Schnittpunkte dieser Geraden mit den auf CE in D und E errichteten Loten. Hält man $AD = u$ fest und läßt H variieren, so hat man die Elemente für alle Punkte der Kurven und zwar

$$AB = \rho, \qquad CE = -r,$$

$$CD = -\frac{r\,\rho^2}{\rho^2 + r^2} = -r_1, \qquad \sphericalangle ACD = H,$$

$$AC = \sqrt{u\,\rho} = \frac{\rho\,r}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} = \mathfrak{R},$$

wo $\mathfrak{R}$ der Radius der ganzen Krümmung ist.

Die Figur zeigt uns übrigens, was man auch aus den Formeln erkennen kann, daß, wenn die Kurve C eine Schraubenlinie sein soll, also $H = \text{konst.}$ ist, dies fordert $\rho = \text{konst.}$ und $r = \text{konst.}$, d. h. von den zylindrischen Schraubenlinien, die zu den Kurven gehören, ist die einzige die auf dem Kreiszylinder. Wie aus den Formeln folgt, ist die zugeordnete Kurve dann eine Gerade, nämlich die Achse des Zylinders.

Da die Theorie noch keinen genaueren Einblick in die Gestalt der Kurven gibt, so sei noch kurz ein Beispiel angegeben:

Es sollen die Krümmungen der Kurve bestimmt werden, die geodätische Linie auf einem Kegel ist und der Relation $\frac{u}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\rho}$ genügt.

Nehmen wir die Bedingung, daß die Kurve geodätische eines Kegels ist in der Form:

$$\frac{\rho}{r} = m\,s,$$

so erhält man

$$\rho = u\,(1 + m^2 s^2),$$

$$r = \frac{u}{m\,s} + u\,m\,s.$$

Für $m = \frac{1}{u}$ wird

$$\rho = u + \frac{s^2}{u},$$

$$r_1 = s.$$

Wir können daher den Satz aussprechen:

Tordiert man eine Kettenlinie unter Beibehaltung ihrer Krümmung zur geodätischen eines Kegels, die durch die Gleichung $\frac{\rho}{r} = \frac{s}{u}$ bestimmt ist, wo u der Parameter der Kettenlinie ist, so geht sie in eine Kurve über, deren Hauptnormalen mit den Binormalen einer zweiten Kurve zusammenfallen. Der konstante Abstand beider Kurven ist gleich dem Parameter der Kettenlinie.

Für die zugeordnete Kurve wird

$$s_1 = \frac{\sqrt{1 + m^2 s^2}}{m},$$

$$\rho_1 = s\sqrt{1 + m^2 s^2} = s\sqrt{m^2 s_1^2 - 1},$$

$$r_1 = u\,m\,s = u\sqrt{m^2 s_1^2 - 1},$$

also

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{s_1}{u},$$

d. h. auch die zweite Kurve ist geodätische eines Kegels.

Ein Satz von Salkowski[1]) ist hier noch anzuführen, der zugleich eine Anwendung der hier betrachteten Kurven darstellt. Er versteht unter isometrischen Kurvenpaaren solche mit entsprechend gleichen Linienelementen und erhält durch geometrische Betrachtungen den

Satz: Man erhält das allgemeinste isometrische Kurvenpaar, indem man auf der Binormalenfläche einer Raumkurve zwei Orthogonaltrajektorien bestimmt, die von der Striktionslinie gleichen Abstand haben. Da man jede Regelfläche so verbiegen kann, daß eine auf ihr gelegene Kurve in eine Asymptotenlinie über-

[1]) Lit. 107, S. 239/44.

geht, so folgt, daß die Flächen mit isometrischen Kurvenpaaren identisch sind mit den Biegungsregelflächen der Hauptnormalenflächen der Kurven mit abwickelbarer Fläche der Schraubungsachsen.

---

§ 6.

Die Hauptnormalenfläche und die rektifizierende Fläche der Kurven

$$\frac{u}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\rho}.$$

Zur weiteren Untersuchung der Kurven, die der Beziehung $\frac{u}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\rho}$ genügen, wollen wir zunächst ihre Hauptnormalenfläche betrachten und deren Hauptkrümmungen bestimmen.

Die Gleichungen der Hauptnormalenfläche sind, wenn wir wieder von der Kurve

$$x = f_1(s),\ y = f_2(s),\ z = f_3(s)$$

ausgehen:

$$\xi = x + w\,l,\ \eta = y + w\,m,\ \zeta = z + w\,n.$$

Hieraus berechnen sich die Fundamentalgrößen

$$E = \left(1 - \frac{w}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{w}{r}\right)^2,$$

$$F = 0, \qquad G = 1,$$

$$D = \sqrt{\left(1 - \frac{w}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{w}{r}\right)^2},$$

$$X = \frac{\lambda\left(1 - \frac{w}{\rho}\right) + \alpha\,\frac{w}{r}}{D},$$

$$D \cdot L = \frac{w}{r\rho^2}\,\frac{d\rho}{ds} + \frac{w}{r^2}\left(1 - \frac{w}{\rho}\right)\frac{dr}{ds},$$

$$D \cdot M = -\frac{1}{r},\ N = 0,$$

und für die Hauptkrümmungsradien ergibt sich

$$R_1 \cdot R_2 = - r^2 \left\{ \left(1 - \frac{w}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{w}{r}\right)^2 \right\}^2$$

$$R_1 + R_2 = w \left(w \frac{d\frac{r}{\rho}}{ds} - \frac{dr}{ds} \right) \sqrt{\left(1 - \frac{w}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{w}{r}\right)^2}.$$

Setzen wir $u = \frac{r^2 \rho}{\rho^2 + r^2}$ ein, so wird

$$R_1 \cdot R_2 = - \frac{1}{u(\rho - u)} \left[w^2 - 2uw + u\rho \right]^2$$

oder

$$= - \frac{1}{r_1^2} \left[r_1^2 + (u - w)^2 \right]$$

und

$$R_1 + R_2 =$$

$$- \frac{w \frac{d\rho}{ds}}{2(\rho - u)\sqrt{\rho(\rho - u)}} (\rho - 2u + w) \sqrt{w^2 - 2uw + u\rho}.$$

In den Punkten der Ausgangskurve ($w = 0$) ist

$$R_1 \cdot R_2 = - \frac{u\rho^2}{\rho - u} = - \frac{(u^2 + r_1^2)^2}{r_1^2} = - r^2,$$

$$R_1 + R_2 = 0.$$

Die Hauptkrümmungsradien sind in diesen Punkten also gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen[1]).

In den Punkten der zugeordneten Kurve ($w = u$) wird

$$R_1 \cdot R_2 = - u(\rho - u) = - r_1^2,$$

$$R_1 + R_2 = - \frac{u\sqrt{u}}{2\sqrt{\rho}} \frac{d\rho}{ds}.$$

Das Krümmungsmaß in den Punkten der Striktionslinie ist also gleich dem der Hauptnormalenfläche dieser Kurve längs ihr[1]).

Für die Punkte der Krümmungsmittelpunktskurve von C ($w = \rho$) hat man:

$$R_1 \cdot R_2 = - \frac{\rho^2(\rho - u)}{u},$$

$$R_1 + R_2 = \frac{u\rho \frac{d\rho}{ds}}{\rho - u}.$$

[1]) Dies gilt allgemein.

Die Summe der beiden Hauptkrümmungsradien wird Null, d. h. sie sind gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen, wenn

1. $w = 0$ (s. o.),
2. $w = 2u - \rho$.

Da die Punkte $2u - \rho$ auf der Hauptnormalenfläche von der Striktionslinie genau so weit entfernt sind wie die Punkte der Krümmungsmittelpunktskurve, so erhalten wir hier wieder den schon von Mannheim[1]) gefundenen

Satz: Auf der Hauptnormalenfläche einer Kurve, zwischen deren Krümmungen die Beziehung $\frac{u}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\rho}$ besteht, halbiert die Striktionslinie die Abschnitte jeder Normalen, die zwischen den Krümmungsmittelpunkten und den Punkten liegen, für die die Hauptkrümmungsradien gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen sind.

Die rektifizierende Fläche.

Allgemeine Untersuchungen über die erste und zweite rektifizierende Fläche und ihre Gratlinien sind von Salkowski[2]) und Joachimi[3]) angestellt worden. Ist die Ausgangskurve

$$x = f_1(s), \qquad y = f_2(s), \qquad z = f_3(s),$$

so wird die erste rektifizierende Fläche dargestellt durch die Gleichungen

$$x' = x + v\,(\alpha \cos H + \lambda \sin H) \text{ usw.},$$

wo H der Winkel der rektifizierenden Kante gegen die Tangente ist und bestimmt wird durch

$$\operatorname{tg} H = -\frac{r}{\rho}.$$

Die allgemein geltenden Werte werden in unserem Falle

$$\cos H = \frac{\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}}} = \frac{\sqrt{u\rho}}{r} = \frac{r_1}{\sqrt{u^2 + r_1^2}},$$

[1]) S. die Anmerk. S. 90. Mannheim folgert diesen Satz aus der Eigenschaft der Parabel, daß ihre Tangenten durch die Scheiteltangente halbiert werden.

[2]) Lit. 104.

[3]) Lit. 108, S. 42/53.

$$\sin H = -\frac{\frac{1}{\rho}}{\sqrt{\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{r^2}}} = -\sqrt{\frac{u}{\rho}} = -\frac{u}{\sqrt{u^2+r_1^2}},$$

$$\operatorname{tg} H = -\frac{r}{\rho} = -\sqrt{\frac{u}{\rho-u}} = -\frac{u}{r_1}.$$

Weiter ist

$$\frac{dH}{ds} = \frac{u}{\rho}\frac{d\left(\frac{\rho}{r}\right)}{ds}.$$

Der Abstand der rektifizierenden Gratlinie von der Kurve wird

$$v_0 = -\frac{r\sqrt{\rho^2+r^2}}{r\frac{d\rho}{ds}-\rho\frac{dr}{ds}}$$

$$= -2\sqrt{\rho(\rho-u)}\,\frac{ds}{d\rho} = -\frac{u\rho_1}{r_1}.$$

Die Richtungskosinus der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen der rektifizierenden Gratlinie sind:

$$a = \alpha\cos H + \lambda\sin H = \sqrt{u\rho}\left(\frac{\alpha}{r}-\frac{\lambda}{\rho}\right),$$

$$a_1 = -\alpha\sin H + \lambda\cos H = \sqrt{u\rho}\left(\frac{\alpha}{\rho}+\frac{\lambda}{r}\right),$$

$$a_2 = -1,$$

und die entsprechenden.

Für das Bogenelement und die Krümmungsradien dieser Kurve ergibt sich:

$$ds' = \frac{d(v_0\sin H)}{\sin H}$$

$$= -\sqrt{\frac{\rho}{u}}\,d\left(\frac{ds}{d\frac{\rho}{r}}\right)$$

$$= -\frac{r_1\sqrt{1+\frac{u^2}{r_1^2}}}{u}\,d\left(\frac{\sqrt{1+\frac{u^2}{r_1^2}}\,ds_1}{d\frac{r_1}{u}}\right),$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\sin^2 H}{v_0} \frac{ds}{d(v_0 \sin H)},$$

$$\frac{1}{r'} = -\frac{1}{\rho} \frac{ds}{d(v_0 \sin H)}$$

$$= -\frac{\sin^2 H}{u} \frac{ds}{d(v_0 \sin H)}.$$

Der Quotient der beiden Krümmungen wird hiernach:

$$\frac{\rho'}{r'} = -\frac{v_0}{u},$$

und da

$$v_0 = -\frac{u\rho_1}{r_1},$$

so ist

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{\rho'}{r'} = -\frac{v_0}{u}.$$

Aus dieser Beziehung folgt der allgemein geltende Satz, daß die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche auf der zweiten rektifizierenden Fläche liegt[1]). Sie ist in unserem Falle eine zur ersten rektifizierenden Gratlinie parallele geodätische Linie dieser Fläche[2]).

Bezeichnen wir den Kontingenzwinkel der rektifizierenden Gratlinie mit $d\sigma'$, so ist

$$dH = d\sigma',$$

also

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{dH}{ds'}.$$

Andrerseits hatten wir (S. 93)

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{dH}{ds_1},$$

also ist

$$\frac{\rho'}{\rho_1} = \frac{ds'}{ds_1}.$$

Denselben Wert erhält man für das Verhältnis der Torsionen aus

$$\frac{1}{r'} = -\frac{\sin H}{u} \frac{ds}{ds'}, \quad r_1 = -\frac{u}{\operatorname{tg} u}, \quad \frac{ds_1}{ds} = \cos H,$$

[1]) Schell, S. 110.

[2]) Salkowski, Lit. 104, S. 30.

daher gilt

$$\frac{\rho'}{\rho_1} = \frac{r'}{r_1} = \frac{ds'}{ds_1}.$$

Weiter findet man

$$\frac{\rho_1}{\rho'} = 1 + \frac{dv_o}{ds'}.$$

Von den hier entwickelten Formeln ausgehend bestimmt Joachimi[1]) die Kurve, die die rektifizierende Kante der ersten rektifizierenden Gratlinie im Verhältnis $\frac{\rho'}{\rho_1}$ oder $\frac{r'}{r_1}$ teilt, und findet, daß dies die Gratlinie der zweiten rektifizierenden Fläche ist.

Da die rektifizierende Fläche abwickelbar ist, so ist die eine Hauptkrümmung Null. Der Ort der Mittelpunkte der anderen Hauptkrümmung längs der Ausgangskurve ist die Striktionslinie der Hauptnormalenfläche.[2]) Da die Striktionslinie hier den konstanten Abstand u von der Kurve hat, so folgt der

Satz: Besteht zwischen den Krümmungen einer Kurve die Beziehung $\frac{u}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\rho}$, so ist der eine Hauptkrümmungsradius der rektifizierenden Fläche längs der Kurve konstant, der andere ist unendlich.

Zum Schlusse dieses Paragraphen wollen wir noch die Kurven bestimmen, die der Beziehung $\frac{u}{\rho^2} + \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\rho}$ genügen und deren Abstand von der rektifizierenden Gratlinie konstant ist.

Es sei $v_o = -a$, also (s. S. 99)

$$a = 2\sqrt{\rho\,(\rho - u)}\,\frac{ds}{d\rho},$$

hieraus erhält man

$$\frac{2s}{a} = \lg c\left(-\frac{u}{2} + \rho + \sqrt{\rho^2 - u\rho}\right),$$

wo c eine Integrationskonstante ist. Die natürlichen Gleichungen der Kurve C werden dann nach den allgemeinen Formeln (S. 93)

[1]) Lit. 108, S. 49/52.
[2]) Schell, S. 99.

$$\rho = \frac{1}{2c}\left(e^{\frac{s}{a}} + \frac{uc}{2}\, e^{-\frac{s}{a}}\right)^2,$$

$$r = \frac{\left(e^{\frac{s}{a}} + \frac{uc}{2}\, e^{-\frac{s}{a}}\right)^2}{\left(e^{\frac{s}{a}} + \frac{uc}{2}\, e^{-\frac{s}{a}}\right)} \sqrt{\frac{u}{2c}},$$

oder nach Einführung einer neuen Veränderlichen

$$H = -\operatorname{arctg}\frac{r}{\rho}$$

lassen sie sich in der Form schreiben:

$$s = a \lg\left(\frac{\sqrt{uc}}{2}\,\frac{\sin H}{\cos H - 1}\right),$$

$$\rho = \frac{u}{\sin^2 H},$$

$$r = -\frac{u}{\sin H \cos H} = -\frac{2u}{\sin 2H}.$$

Für die zugeordnete Kurve C_1 erhält man

$$s_1 = a \lg\left[\sqrt{k}\left(e^{\frac{s}{a}} + \frac{uc}{2}\, e^{-\frac{s}{a}}\right)\right],$$

wo k wieder eine willkürliche Integrationskonstante ist, oder

$$s_1 = a \lg\left(\sqrt{2ck\rho}\right)$$

$$= a \lg\left(\frac{\sqrt{2cku}}{\sin H}\right),$$

und die Krümmungsradien sind

$$\rho_1 = a\sqrt{\frac{1}{2cku}\, e^{\frac{2s_1}{a}} - 1},$$

$$r_1 = u\sqrt{\frac{1}{2cku}\, e^{\frac{2s_1}{a}} - 1},$$

oder

$$\rho_1 = -a \operatorname{cotg} H, \qquad r_1 = -u \operatorname{cotg} H.$$

Da

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{a}{u} = \text{konst.},$$

so ist die Kurve C_1 eine Schraubenlinie. Und da

$$\frac{\rho_1}{r_1} = \frac{\rho'}{r'}$$

ist, so gilt dasselbe für die rektifizierende Gratlinie.

Zwischen den beiden Krümmungsradien besteht hier die Beziehung

$$\frac{\rho}{u} = 1 + \frac{\rho_1^2}{a^2}.$$

Die Kurve C_1 kann man sich aus einer ebenen Kurve entstanden denken, deren Ebene zu einer Böschungsfläche verbogen worden ist. Diese Verbiegung wollen wir uns so vorgenommen denken, daß die Krümmung der ebenen Kurve dabei erhalten bleibt.

Um die Kurve kennen zu lernen, aus der die Raumkurve bei dieser Verbiegung hervorgeht, sehen wir die Gleichung

$$\rho_1 = a \sqrt{\frac{1}{2 c k u} e^{\frac{2 s_1}{a}} - 1}$$

als natürliche Gleichung einer ebenen Kurve an und diskutieren sie im Sinne der natürlichen Geometrie:

In der Nähe des Anfangspunktes verhält sich die Kurve, da dort s_1 unendlich klein ist, wie die Kreisevolvente

$$\rho_1 = \sqrt{2 p a s_1},$$

wo $a p = \frac{a}{2 c k u}$ der Radius des Kreises ist. Der Winkel, den eine beliebige Tangente mit der Tangente im Anfangspunkte bildet, ist

$$\varphi = \int_0^{s_1} \frac{ds_1}{\rho_1}.$$

In unserem Falle, wenn wir ρ_1 nach s_1 differenzieren, erhalten wir:

$$\varphi = \int_0^{\rho_1} \frac{a \, d \rho_1}{\rho_1^2 + a^2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\rho_1}{a}.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß φ der Basiswinkel in einem rechtwinkligen Dreieck ist, dessen Katheten ρ_1 und a sind, infolgedessen ist die Länge der Tangente konstant = a. Die Kurve hat eine Spitze für $\rho_1 = 0$, dann ist aber $\operatorname{tg} \varphi = 0$, also existiert im Anfangspunkt eine Spitze. Der Abstand eines Punktes der Kurve von der Normalen im Anfangspunkte ist

$$9 = \int_0^{s_1} \cos\varphi \; ds_1 = \int_0^{\varphi} \rho_1 \cos\varphi \; d\varphi$$

$$= \int_0^{\varphi} a \sin\varphi \; d\varphi = a \; (1 - \cos\varphi).$$

Wird s_1 unendlich, so nähert sich φ dem Werte $\frac{\pi}{2}$, für diesen ist aber $9 = a$; die Kurve hat daher im Abstande a von der Spitze eine Asymptote.

Die hier entwickelten Eigenschaften kommen aber auch der Traktrix zu,[1]) wir sehen daher, daß wir die Kurve C_1 durch Torsion einer Traktrix zu einer Schraubenlinie erhalten, wobei die Krümmung erhalten bleibt. Die Kurve C ist kongruent zu der aus der Leitlinie der Traktrix hervorgehenden Raumkurve.

Wird $\frac{1}{2 c k u} = 1$, so erhalten wir ein schon von Pirondini[2]) behandeltes Beispiel, das später von Salkowski[3]) auf geometrischem Wege von neuem gefunden wurde. Die Gleichungen der Kurven werden dann

$$\rho = \frac{u}{4} \left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} \right)^2,$$

$$r = \frac{u}{2} \frac{\left(e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} \right)^2}{e^{\frac{s}{a}} - e^{-\frac{s}{a}}},$$

$$\rho_1 = a \sqrt{e^{\frac{2 s_1}{a}} - 1},$$

$$r_1 = u \sqrt{e^{\frac{2 s_1}{a}} - 1}.$$

[1]) Lit. 76, S. 8/9.

[2]) Lit. 86, S. 318/21.

[3]) Lit. 111. Auch bei Cesaro: Lit. 89, S. 458 und Joachimi: Lit. 108, S. 12.

Zur Bestimmung der endlichen Gleichungen der Kurve C_1 betrachten wir ihre Projektionskurve in einer zu den Erzeugenden des Zylinders, auf dem sie Schraubenlinie ist, senkrechten Ebene. Für das Bogenelement und den Krümmungsradius der Projektionskurve gilt

$$\frac{ds_0}{ds_1} = \sin H_1,$$

$$\rho_0 = r_1 \sin H_1 \cos H_1 = \rho_1 \sin^2 H_1,$$

wo H_1 der Winkel der rektifizierenden Kante gegen die Tangente der Kurve C_1 ist, oder, da die rektifizierende Fläche hier ein Zylinder ist, der konstante Winkel der Schraubenlinie gegen die Erzeugenden. Da

$$\operatorname{cotg} H_1 = -\frac{a}{u},$$

so ist

$$\sin H_1 = \frac{u}{\sqrt{a^2 + u^2}},$$

$$ds_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + u^2}} ds_1 = -\frac{au}{\sqrt{a^2 + u^2}} \operatorname{cotg} H \, dH,$$

$$s_0 = \frac{ua}{\sqrt{a^2 + u^2}} \lg \left(\frac{\sqrt{2cku}}{\sin H}\right),$$

$$\rho_0 = -\frac{u^2 a \operatorname{cotg} H}{a^2 + u^2}.$$

Die Projektionskurve ist dann

$$x_1 = \int_0^{s_0} \left(\cos \int_0^{s_0} \frac{ds_0}{\rho_0}\right) ds_0,$$

$$y_1 = \int_0^{s_0} \left(\sin \int_0^{s_0} \frac{ds_0}{\rho_0}\right) ds_0.$$

Für den Fall $2cku = 1$ wird, da die x_1- und y_1-Koordinaten der Projektionskurve mit denen der Raumkurve identisch sind, wenn wir zur Abkürzung $\frac{u}{\sqrt{a^2 + u^2}}$ c_1 setzen[1]):

[1]) Joachimi, S. 13.

$$x_1 = -\,ac\int_{\frac{\pi}{2}}^{H}\cos\left[\frac{1}{c_1}\left(\frac{\pi}{2}-H\right)\right]\operatorname{cotg} H\,dH,$$

$$y_1 = \quad ac\int_{\frac{\pi}{2}}^{H}\sin\left[\frac{1}{c_1}\left(\frac{\pi}{2}-H\right)\right]\operatorname{cotg} H\,dH,$$

$$z_1 = -\,a\sqrt{1-c_1^{\,2}}\,\lg(\sin H).$$

Für $c_1 = \frac{1}{2}$, also $u = \frac{a}{\sqrt{3}}$ lassen sich die Integrale leicht lösen und die Gleichungen der Kurve C_1 werden

$$x_1 = \frac{a}{2}[\lg(\sin H) + \cos^2 H],$$

$$y_1 = \frac{a}{2}\left[\frac{\pi}{2} - H - \sin H\cos H\right],$$

$$z_1 = -\frac{a}{2}\sqrt{3}\,\lg(\sin H).$$

Die Gleichungen von C erhält man dann aus der Bedingung, daß diese Kurve auf der Binormalenfläche von C_1 liegt und von dieser den konstanten Abstand $u = \frac{a}{\sqrt{3}}$ hat, nachdem man aus den Gleichungen für C_1 die Richtungskosinus ihrer Binormalen

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\tau;\ \mu_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\tau;\ \nu_1 = -\frac{1}{2}$$

berechnet hat:

$$x = \frac{a}{2}\left[\lg(\sin H) + \sin^2 H\right],$$

$$y = \frac{a}{2}\left[\frac{\pi}{2} - H + \sin H\cos H\right],$$

$$z = -\frac{a}{2\sqrt{3}}\left[3\lg(\sin H) + 1\right].$$

Ein weiteres Beispiel für die hier betrachtete Kurvenbeziehung ist von Cesaro[1]) angegeben worden:

Tordiert man eine Kettenlinie proportional ihrem Bogen, so geht sie in eine Kurve über, deren Binormalenfläche zugleich

[1]) Lit. 98, S. 37/42.

Hauptnormalenfläche für eine bestimmte in konstantem Abstande von ihr gezogene Kurve ist. Ist die Gleichung der Kettenlinie

$$\rho_1 = \frac{s_1^2}{a} + a$$

und erteilt man ihr eine Torsion

$$r_1 = b\, s_1,$$

so wird der konstante Abstand beider Kurven

$$u = a\, b.$$

§ 7.

Die Beziehung $\frac{a}{\rho^2} + \frac{b}{r^2} = \frac{1}{r}$.

Wenn die im vorigen Paragraphen behandelte Kurvenbeziehung ein so großes Interesse bei den Mathematikern gefunden hat, daß sich an sie eine ziemlich umfangreiche Literatur geknüpft hat, so wollen wir uns jetzt mit einer Beziehung beschäftigen, die so gut wie noch garnicht behandelt ist.

Es sei zunächst noch daran erinnert, daß die Kurven $\frac{a}{\rho^2} + \frac{b}{r^2} = \frac{1}{r}$ keine eigentlichen Cesaroschen Raumkurven sind (s. S. 64), d. h. es existieren bei ihnen außer den zur Tangente parallelen in der rektifizierenden Ebene keine mit dem Dreikant fest verbundene Geraden, die abwickelbare Flächen einhüllen.

Joachimi[1]) weist darauf hin, daß man diese Beziehung als typisches Beispiel für eine Bemerkung Bianchis[2]) ansehen kann, die sagt:

Ordnet man einer Kurve mittels der Gleichungen

$$\xi = \int \lambda\, ds, \qquad \eta = \int \mu\, ds, \qquad \zeta = \int \nu\, ds$$

eine zweite zu und nimmt $\varepsilon = \pm 1$, je nachdem $r \gtrless 0$ ist, so ist offenbar $\frac{\varepsilon}{r}$ die erste, $-\frac{1}{\rho}$ die zweite Krümmung der zugeordneten Kurve.

[1]) Lit. 108, S. 56/57.

[2]) Giorn. di mat. di Battaglini XXI, 1883, S. 222.

Auf Grund dieses Satzes geht die Beziehung

$$\frac{a}{\rho^2} + \frac{b}{r^2} = \frac{1}{\rho}$$

über in die andere

$$\frac{a}{r^2} + \frac{b}{\rho^2} = -\frac{1}{r}.$$

Für die Krümmungen des auf S. 85 behandelten Beispiels erhält man dann die Werte

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2}{a}\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)^2},$$

$$\frac{1}{r} = -\frac{4\sqrt{2}}{a\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)^2},$$

die die Asymptotenlinien eines Katenoids darstellen.[1]) Die endlichen Gleichungen sind

$$x = -\frac{a}{2\sqrt{2}}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)\sin\varphi,$$

$$y = -\frac{a}{2\sqrt{2}}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)\cos\varphi,$$

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}}\varphi.$$

Wir wollen jetzt den Spezialfall

$$\frac{a}{\rho^2} + \frac{a}{r^2} + \frac{1}{r} = 0$$

weiter betrachten.

Eine charakteristische Eigenschaft der Kurven, die dieser Beziehung genügen, ist, daß der Windungsparameter konstant ist;[2]) denn wir können die Gleichung auch in der Form schreiben

$$-\frac{r\rho^2}{\rho^2 + r^2} = a.$$

Unabhängig von allen bisherigen Betrachtungen gelangt man zu der Relation, wenn man die Frage stellt, welche Beziehung zwischen den Krümmungen einer Kurve bestehen muß, wenn die Schraubungsachse ein hyperbolisches Paraboloid beschreiben soll.

[1]) Cesaro: Lit. 76, S. 228.
[2]) Mannheim: Lit. 78, S. 300.

Die allgemeine Gleichung eines hyperbolischen Paraboloids ist

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Führt man eine Koordinatentransformation aus, so, daß die Leitgeraden die ξ- und η-Achsen werden, die Leitebenen die (η, ζ)- und (ξ, ζ)-Ebenen, so hat man zu setzen:

$$x = \sqrt{\frac{a}{a+b}}\,(\xi + \eta), \quad y = \sqrt{\frac{b}{a+b}}\,(\xi - \eta), \quad z = \zeta.$$

Die Gleichung geht dann über in

$$\xi\,\eta = \frac{a+b}{2}\,\zeta,$$

oder, indem man $\frac{a+b}{2} = c$ setzt:

$$\xi\,\eta = c\,\zeta.$$

Die Achse der unendlich kleinen Schraubung, die das begleitende Dreikant in das benachbarte überführt, hat die Gleichungen

$$r\,\xi + \rho\,\zeta = 0, \qquad \eta = \frac{r^2\,\rho}{\rho^2 + r^2}.$$

Faßt man diese mit der Gleichung des Paraboloids zusammen, so erhält man

$$\frac{c}{\rho^2} + \frac{c}{r^2} + \frac{1}{r} = 0.$$

Ähnlich wie bei den Kurven mit abwickelbarer Fläche der Windungsachsen, können wir auch hier durch eine einfache Dreieckskonstruktion die zur Kurve gehörenden Größen darstellen. Die Konstruktion ist analog der auf Seite 94 und zwar ist jetzt (Fig. 6)

$$AD = a = \text{konst.}, \qquad CD = \rho,$$
$$AB = EF = -r, \qquad \sphericalangle\, CAD = H.$$

$CD = \frac{r^2\,\rho}{\rho^2 + r^2}$ ist der Abstand der Kurve von der Striktionslinie der Hauptnormalenfläche. $AC = \frac{\rho\,r}{\sqrt{\rho^2 + r}} = \sqrt{-ar} = R$ ist der Radius der ganzen Krümmung.

Auch hier sind von den zylindrischen Schraubenlinien die auf dem Kreiszylinder die einzigen, die zur betrachteten Kurvenart gehören.

Berechnet man nach den Formeln S. 97 das Krümmungsmaß der Hauptnormalenfläche längs der Striktionslinie, so erhält man

$$R_1 R_2 = -a^2,$$

also gilt der

Satz: Die Hauptnormalenfläche der Kurven, deren Windungsparameter konstant ist, hat längs der Striktionslinie konstantes Krümmungsmaß.

Auf die Berechnung der Elemente der rektifizierenden Gratlinie können wir verzichten, da sie keine bemerkenswerten Ergebnisse liefert. Es soll nur noch die Bedingung bestimmt werden, die zwischen den Krümmungen der Kurve bestehen muß, wenn sie außer der Gleichung $\frac{a}{\rho^2} + \frac{a}{r^2} + \frac{1}{r} = 0$ zu genügen als rektifizierende Gratlinie eine Schraubenlinie hat.

Es ist (S. 100)

$$\frac{\rho'}{r'} = -\frac{v_0}{\rho \sin^2 H} = \frac{\sqrt{\rho^2 + r^2}^3}{\rho r \left(r \frac{d\rho}{ds} - \rho \frac{dr}{ds}\right)}.$$

Unter Berücksichtigung von $a = -\frac{r \rho^2}{\rho^2 + r^2}$ geht diese über in:

$$\frac{\rho'}{r'} = \frac{2\sqrt{r(r+a)}}{a \frac{dr}{ds}} = -\frac{2}{\rho \sqrt{-ar} \frac{d\frac{1}{r}}{ds}}.$$

Die rektifizierende Gratlinie ist also eine Schraubenlinie, wenn zwischen den Krümmungen der Kurve noch die Beziehung

$$\frac{1}{\rho} = c \sqrt{-ar} \frac{d\frac{1}{r}}{ds}$$

besteht, wo $c = \frac{\rho'}{r'}$.

Die Bestimmung der endlichen Gleichungen der Kurven erübrigt sich, da sie aus den auf S. 75 ff. abgeleiteten allgemeinen durch Spezialisierung folgen. Denn, wenn diese Kurven auch nicht zu den Cesaroschen Raumkurven gehören, so bleiben doch die dort erhaltenen Formeln auch für diesen Fall richtig, da bei ihrer Ableitung die Cesarosche Bedingung nicht benutzt wurde.

§ 8.

Die Beziehung $\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}$.

Zum Schluß dieses Abschnittes wollen wir noch eine Klasse von Kurven betrachten, zwischen deren Krümmungen auch eine Beziehung zweiten Grades besteht, die aber nicht zu den Cesaroschen Raumkurven gehören, nämlich die Kurven

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2},$$

die dadurch definiert sind, daß bei ihnen der Radius der ganzen Krümmung konstant ist. Dieser ist das Verhältnis des Bogenelements der Kurve zu dem Differential des Winkels zweier benachbarten Hauptnormalen. Wir können daher auch sagen, bei unseren Kurven ist dieser Winkel proportional der Bogenlänge der Kurve.

Geometrisch bestimmt sich der Radius der ganzen Krümmung aus dem Krümmungs- und Torsionsradius der Kurve dadurch, daß er die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Katheten ρ und r sind.

Eigenschaften dieser Kurven ergeben sich ohne weiteres aus denen des Radius der ganzen Krümmung. Da dieser gleich dem Krümmungshalbmesser eines zur rektifizierenden Geraden senkrechten Schnittes der Tangentenfläche durch einen Punkt der Tangente im Abstande ρ ist,[1]) so ist dieser Krümmungshalbmesser hier konstant.

Eine weitere Besonderheit der Kurven ist von Cesaro[2]) festgestellt worden. Er bestimmte nämlich die Kurven, deren Hauptnormalen mit den Schraubungsachsen einer anderen zusammenfallen. Zu dieser Familie gehören, wie er durch Spezialisierung der gefundenen ziemlich komplizierten Beziehung feststellt, auch die hier betrachteten. Als Beispiel dafür nimmt er die Kurve, deren natürliche Gleichungen sind:

$$\frac{a}{\rho} = \sin\frac{s}{a}, \qquad \frac{a}{r} = -\cos\frac{s}{a}.$$

[1]) Lit. 80, S. 35.
[2]) Lit. 98, S. 37/42.

Um sie zu konstruieren geht man von der Epizykloide aus, die von einem Punkte P eines Kreises mit dem Radius $a(\sqrt{2}-1)$ erzeugt wird, der, ohne zu gleiten, auf einem Kreise mit dem Radius 2 a rollt. Errichtet man über dem Krümmungsradius P Q als Diagonale ein Quadrat senkrecht zur Epizykloidenfläche, so beschreiben die Endpunkte M und M_1 der anderen Diagonale die gesuchten Kurven. M Q ist die Hauptnormale von M und Schraubungsachse von M_1; M_1 Q ist Hauptnormale von M_1 und Schraubungsachse von M.

Joachimi[1]) hat die Krümmungen der rektifizierenden Gratlinie dieser Kurven berechnet und gefunden, daß sie gleich sind.

Wenn dieser Fall allgemein gelten soll, muß zwischen den Krümmungen noch die Beziehung

$$\frac{1}{r} + a\,\frac{d\,\frac{1}{\rho}}{ds} = 0$$

bestehen.

Weiter ist noch eine Arbeit von Sannia[2]) zu erwähnen, in der er Kurven untersucht, die einander so zugeordnet sind, daß sie im Bogen gleich sind, und die Tangenten und Binormalen der einen Kurve parallel zur Hauptnormalen und zur rektifizierenden Geraden der anderen sind. Die erste Kurve nennt er die Transformierte der zweiten. Ihre Krümmungen sind:

$$\frac{1}{\rho_0} = \sqrt{\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}},$$

$$\frac{1}{r_0} = -\frac{d}{ds}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{r}{\rho}\right).$$

Ist daher bei der einen Kurve die Summe der Quadrate der Krümmungen konstant, so hat die Transformierte konstante Krümmung.

Berechnet man die Hauptkrümmungsradien der Hauptnormalenfläche längs der Striktionslinie aus dem auf S. 97 angegebenen Werten, so findet man

---

[1]) Lit. 108, S. 37.
[2]) Lit. 102.

$$R_1 R_2 = -\frac{r^2 \rho^4}{(\rho^2 + r^2)^2},$$

$$R_1 + R_2 = -\frac{r^2 \rho \sqrt{\rho^2 + r^2}}{(\rho^2 + r^2)^3} \left[r^3 \frac{d\rho}{ds} + \rho^3 \frac{dr}{ds} \right].$$

Für die hier betrachteten Kurven wird

$$R_1 + R_2 = 0.$$

Wir haben daher den von Mannheim [1]) auf geometrischem Wege gefundenen Satz: Ist die ganze Krümmung einer Kurve konstant, so sind die Zentralpunkte der Erzeugenden der Hauptnormalenfläche die Punkte, für die die Hauptkrümmungsradien dieser Fläche gleich und von entgegengesetztem Vorzeichen sind. Die Länge der Radien ist gleich dem Windungsparameter.

Gräbner [2]) hat gefunden, daß dieselbe Eigenschaft auch der Fläche der Schraubungsachsen zukommt, deren Striktionslinie mit der der Hauptnormalenfläche zusammenfällt.

Die endlichen Gleichungen der Kurven, deren ganze Krümmung konstant ist, können leicht nach der parallelen Zuordnung bestimmt werden. Scheffers [3]) erhält sie, indem er von der Theorie der sphärischen Indikatrix ausgeht:

Sind $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ irgend drei Funktionen von $\bar{s}$, für die gilt

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 1,$$

$$\left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{s}}\right)^2 = 1,$$

und setzt man:

$$w = -\int \begin{vmatrix} \bar{x} & \frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} & \frac{d^2\bar{x}}{d\bar{s}^2} \\ \bar{y} & \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} & \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{s}^2} \\ \bar{z} & \frac{d\bar{z}}{d\bar{s}} & \frac{d^2\bar{z}}{d\bar{s}^2} \end{vmatrix} d\bar{s},$$

so erhält man die endlichen Gleichungen in der Form

$$x = a \int \operatorname{cotg} w \left[-\frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} \cos w + \left(\bar{z} \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} - \bar{y} \frac{d\bar{z}}{d\bar{s}} \right) \sin w \right] d\bar{s},$$

$$y = a \int \operatorname{cotg} w \left[-\frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} \cos w + \left(\bar{x} \frac{d\bar{z}}{d\bar{s}} - \bar{z} \frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} \right) \sin w \right] d\bar{s},$$

$$z = a \int \operatorname{cotg} w \left[-\frac{d\bar{z}}{d\bar{s}} \cos w + \left(\bar{y} \frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} - \bar{x} \frac{d\bar{y}}{d\bar{s}} \right) \sin w \right] d\bar{s}.$$

[1]) Comptes Rendus 86 (1878), S. 1254/57 und Lit. 78, S. 537.
[2]) Lit. 110, S. 21.
[3]) I 1901, S. 252 (in der 2. Auflage nicht enthalten).

Hiermit wollen wir den Abschnitt über die Kurven, zwischen deren Krümmungen eine Beziehung zweiten Grades besteht, schließen. Allgemeine Eigenschaften der Kurven, die der Beziehung

$$\frac{A}{\rho^2} + \frac{B}{\rho r} + \frac{C}{r^2} + \frac{D}{\rho} + \frac{E}{r} + F = 0$$

genügen, sind bisher noch nicht festgestellt worden. Auch viele Spezialfälle dieser Kurven sind noch nicht betrachtet worden; so weist schon Cesaro im Intermédiaire des Mathématiciens 1898, S. 155 darauf hin, daß es von Interesse wäre, Eigenschaften der Kurven zu bestimmen, deren Krümmungen durch die Gleichungen

$$\rho r = a^2; \quad \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}; \quad \rho^2 = ar$$

verbunden sind.

III. Abschnitt.

Über Kurven, zwischen deren Krümmungen eine Beziehung vom Grade > 2 besteht.

§ 1.

Zwei Beziehungen dritten Grades.

Die Kurven mit einer kubischen Beziehung zwischen den Krümmungen sind bisher noch nicht untersucht worden. Wir wollen daher versuchen, von allgemeinen Fragen ausgehend, solche Kurven zu bestimmen, denen diese Eigenschaft zukommt.

Unter den gemeinen Schraubenlinien, die eine Kurve in einem Punkte in zweiter Ordnung berühren, spielt eine besondere Rolle die, die in diesem Punkte dieselbe Torsion wie die Raumkurve hat. Ihre Achse fällt mit der Windungsachse des begleitenden Dreikants zusammen. Diese ist identisch mit dem unendlich kleinen Abstand zweier benachbarter Hauptnormalen. Mit ihrer Hilfe haben wir in den ersten beiden Abschnitten Beziehungen ersten und zweiten Grades erhalten.

Wir wollen nun diejenige gemeine Schraubenlinie betrachten, die eine Kurve auch in zweiter Ordnung berührt und deren Achse senkrecht ist zur Hauptnormalenfläche und wollen nach den Kurven fragen, bei denen der Zylinder dieser Schraubenlinie konstanten Radius hat.

Die Gleichungen der gesuchten Kurven mögen sein:

$$x = f_1(s), \qquad y = f_2(s), \qquad z = f_3(s),$$

dann ist ihre Hauptnormalenfäche durch die Parameter s und t ausgedrückt:

$$\xi = x + t\,l, \qquad \eta = y + t\,m, \qquad \zeta = z + t\,n.$$

Hieraus erhält man

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = \alpha\left(1 - \frac{t}{\rho}\right) - \lambda\frac{t}{r} \quad \text{usw.}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = l \quad \text{usw.},$$

also sind die Richtungskosinus der Normalen dieser Fläche

$$X = \frac{\alpha\frac{t}{r} + \lambda\left(1 - \frac{t}{\rho}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{t}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{t}{r}\right)^2}}$$

und zwei entsprechende.

Die Richtungskosinus im begleitenden Dreikant sind:[1])

$$\sin\vartheta, \qquad 0, \qquad \cos\vartheta,$$

wo ϑ der Steigwinkel der Schraubenlinie ist. In dem im Raum festen Koordinatensystem ist also ihre Richtung bestimmt durch

$$\alpha_0 = \alpha\sin\vartheta + \lambda\cos\vartheta \quad \text{usw.}$$

Da diese Achse zur Hauptnormalenfläche senkrecht sein soll, so muß gelten

$$\Sigma\,\alpha_0\,X = 1.$$

Setzt man die Werte ein, so ergibt sich:

$$\frac{\frac{t}{r}\sin\vartheta + \left(1 - \frac{t}{\rho}\right)\cos\vartheta}{\sqrt{\left(1 - \frac{t}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{t}{r}\right)^2}} = 1,$$

[1]) Lit. 9, 1910, S. 258.

sodaß man für ϑ erhält:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\frac{t}{r}}{1 - \frac{t}{\rho}}.$$

Nun ist der Radius des Zylinders der Schraubenlinie

$$r = \rho \cos^2 \vartheta.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen ϑ und setzt $t = r = a =$ konst, so folgt

$$a = \frac{\rho \left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2}{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2}$$

oder

$$\frac{a^3}{\rho^3} - \frac{3\,a^2}{\rho^2} + \frac{3\,a}{\rho} + \frac{a^3}{\rho\, r^2} - 1 = 0.$$

Es gilt daher der

Satz: Soll der Zylinder der Schraubenlinie, die eine Kurve in zweiter Ordnung berührt, und dessen Achse zur Hauptnormalenfläche der Kurve senkrecht ist, konstanten Radius für alle Punkte der Kurve haben, so muß zwischen den Krümmungen der Kurve die Beziehung

$$\frac{a^3}{\rho^3} - \frac{3\,a^2}{\rho^2} + \frac{3\,a}{\rho} + \frac{a^3}{r^2\,\rho} - 1 = 0$$

bestehen, wo a der konstante Radius des Zylinders ist.

Auf der Hauptnormalenfläche dieser Kurve existiert in konstantem Abstand a von ihr eine zweite, längs der die Normalen zur Hauptnormalenfläche die Achsen der Zylinder der Schraubenlinien sind.

Um die Lage der Kurve in Bezug auf die Striktionslinie zu kennen, muß man die beiden Fälle

$$\rho > r, \qquad \rho < r$$

unterscheiden. Die Striktionslinie hat von der Ausgangskurve den Abstand

$$u = \frac{r^2\,\rho}{\rho^2 + r^2}.$$

Die Kurvenbeziehung kann in der Form geschrieben werden

$$a = \frac{r^2 \rho}{\sqrt[3]{r^4 \rho^2 + r^2}}.$$

1. Falls $\rho > r$,

so ist $u < a$, die Kurve liegt zwischen der Striktionslinie und der Krümmungsmittelpunktskurve.

2. Falls $\rho < r$,

so ist $u > a$, die Kurve liegt zwischen der Striktionslinie und der Ausgangskurve.

Die Gleichung dieser Kurve ist

$$x_o = x + a\,l, \qquad y_o = y + a\,m, \qquad z_o = z + a\,n.$$

Sind α_o, β_o, γ_o die Richtungskosinus ihrer Tangente und ds_o ihr Bogenelement, so erhält man

$$\alpha_o \frac{ds_o}{ds} = \alpha \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) - \lambda \frac{a}{r}$$

und hieraus die beiden:

$$ds_o = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2}\, ds,$$

$$\alpha_o = \frac{\alpha \left(1 - \frac{a}{\rho}\right) - \lambda \frac{a}{r}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2}}.$$

Ist der Winkel, den die Tangente dieser Kurve mit der entsprechenden der Ausgangskurve bildet, φ, so wird:

$$\cos \varphi = \Sigma\, \alpha\, \alpha_o = \frac{1 - \frac{a}{\rho}}{\sqrt{\left(1 - \frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{a}{r}\right)^2}}$$

oder, wenn wir für r seinem Wert aus der Kurvengleichung entnehmen

$$r^2 = \frac{a^3 \rho^2}{(\rho - a)^3},$$

so ist

$$\cos \varphi = \sqrt{\frac{a}{\rho}},$$

d. h. φ stimmt mit dem Winkel ϑ, den die Binormale der Ausgangskurve mit der Zylinderachse bildet, überein.

Die endlichen Gleichungen unserer Kurven bestimmen wir mit der bereits in den ersten beiden Abschnitten mit Vorteil benutzten Methode der parallelen Zuordnung zweier Kurven mittels paralleler Elemente. Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den Fall paralleler Tangenten, die wir als gleichgerichtet annehmen. Zwischen den Elementen der beiden Kurven bestehen dann die Beziehungen

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\frac{ds_1}{ds}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}\frac{ds_1}{ds}$$

oder, wenn wir für r seinen Wert aus der Kurvengleichung einsetzen,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\frac{ds_1}{ds}, \qquad \frac{(\rho - a)\sqrt{\rho - a}}{a\rho\sqrt{a}} = \frac{1}{r_1}\frac{ds_1}{ds}.$$

Eliminiert man hieraus ρ, so erhält man für das Verhältnis der Bogenelemente den Wert

$$\frac{ds}{ds_1} = \frac{a\left(1 + \sqrt[3]{\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^2}\right)}{\rho_1}.$$

Die gesuchten endlichen Gleichungen sind daher durch die Elemente der zugeordneten Kurve ausgedrückt:

$$x = a\int \frac{1 + \sqrt[3]{\left(\frac{\rho_1}{r_1}\right)^2}}{\rho_1}\, dx_1$$

und entsprechend für y und z, oder

$$x = a\left[\int \frac{dx_1}{\rho_1} + \int \frac{dx_1}{\sqrt[3]{\rho_1 r_1^2}}\right],$$

$$y = a\left[\int \frac{dy_1}{\rho_1} + \int \frac{dy_1}{\sqrt[3]{\rho_1 r_1^2}}\right],$$

$$z = a\left[\int \frac{dz_1}{\rho_1} + \int \frac{dz_1}{\sqrt[3]{\rho_1 r_1^2}}\right].$$

Das erste Integral stellt eine Kurve konstanter Krümmung dar, das zweite eine Kurve, deren Krümmung umgekehrt proportional dem Quadrate der Torsion ist. Wir haben daher den Satz: Teilt man die Verbindungslinie entsprechender Punkte einer Kurve konstanter Krümmung und einer Kurve, deren

Krümmung umgekehrt proportional dem Quadrate der Torsion ist, und die durch parallele Tangenten aufeinander bezogen sind, in einem beliebigen konstanten Verhältnis, so bilden die Teilpunkte eine Kurve, bei der der Zylinder der Schraubenlinie, die die Kurve in zweiter Ordnung berührt, und dessen Achse zur Hauptnormalenfläche der Kurve senkrecht ist, konstanten Radius hat.

Im folgenden wollen wir noch eine weitere Beziehung dritten Grades ableiten, indem wir von einer ähnlichen Frage ausgehen, wie sie an mehreren Stellen der ersten beiden Abschnitte auftrat. Wir wollen nämlich die Kurven bestimmen, deren Schraubungsachse bei der Verrückung des Dreikants die Regelfläche dritter Ordnung

$$z^2 + x^2 y + x z = 0$$

beschreibt. Es ist dies die Cayleysche Regelfläche, die unter den Regelflächen dritter Ordnung eine Sonderstellung einnimmt, indem nämlich bei ihr die beiden Leitlinien in eine zusammenfallen.[1])

Fassen wir die Gleichungen der Schraubungsachse

$$r x + \rho z = 0, \qquad y = \frac{r^2 \rho}{\rho^2 + r^2}$$

mit der Gleichung der Fläche zusammen, so wird die gesuchte Bedingung:

$$\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{\rho^2 r} + \frac{1}{\rho r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} = 0.$$

---

§ 2.

Beziehungen vierten und sechsten Grades.

Nur kurz hinweisen wollen wir hier auf zwei Beziehungen vierten Grades, die von C e s a r o[2]) entdeckt sind.

In einer längeren Arbeit, in der er zunächst die Ergebnisse seiner früheren Untersuchungen zusammenstellt, wirft er auch die Frage auf nach der Beziehung, die zwischen den Krümmungen

[1]) Ein Modell der Fläche ist in Schillings Verlag math. Modelle, Leipzig, erschienen. Eingehend behandelt ist sie bei E. Weyr: Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein- zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung, Leipzig 1870 S. 109/15.

[2]) Mathesis (2) 10. 1900, S. 57/62

der geodätischen Linien einer Schraubenfläche mit Leitebenen bestehen muß. Er löst die Frage nach den Methoden der natürlichen Geometrie und erhält als Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{ar}\right)^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{r^2}\right)$$

wo a = konst.

In derselben Arbeit gelangt er dann noch zu einer weiteren Beziehung vierten Grades bei der Frage nach den Krümmungslinien der Schraubenflächen. Ihre natürlichen Gleichungen sind

$$\rho = \frac{a^2 + 2s^2}{2\sqrt{a^2 + s^2}}, \qquad r = a + \frac{s^2}{a},$$

aus denen durch Elimination von s folgt:

$$\frac{a^3}{\rho^2 r^2} - \frac{4a^2}{\rho^2 r} + \frac{4a}{\rho^2} - \frac{4}{r} = 0.$$

Eine Beziehung sechsten Grades erhielt Enneper [1]) bei der Bestimmung der geodätischen Linien von abwickelbaren Flächen, deren Gratlinie eine Bertrandsche Kurve ist.

Die für den allgemeinen Fall ziemlich komplizierte Gleichung (s. S. 53) wird, wenn die Gratlinie eine Schraubenlinie auf einem Kreiszylinder ist:

$$\left[\frac{\rho}{r} + \frac{\rho}{c}\cdot\frac{1}{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}\right]^2 = b^2\left[1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right],$$

wo b und c Konstante sind, oder ausgerechnet:

$$\frac{b^2 c^2}{\rho^6} + \frac{3b^2c^2 - c^2}{\rho^4 r^2} + \frac{3b^2c^2 - 2c^2}{\rho^2 r^4} - \frac{2c}{\rho^2 r^3} - \frac{2c}{\rho^4 r} - \frac{1}{\rho^4} + \frac{b^2c^2 - c^2}{r^6} = 0.$$

[1]) Nachricht. der Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1881 S. 301.

Literaturanhang.

A. Über Bertrandsche Kurven.

I. Lehrbücher.

1. *Aoust:* Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. Paris 1876, S. 378/81.
2. *Bianchi-Lukat:* Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig 1899, S. 31/34; 231.
3. *Cesaro-Kowalewski:* Vorlesungen über natürliche Geometrie. Leipzig 1901, S. 186/89.
4. *Darboux:* Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris I. 1887, S. 13/15. III. 1894, S. 313/14.
5. *Kommerell, V. u. K.:* Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. (Sammlung Schubert.) Leipzig I, 1909, S. 67/68.
6. *Lilienthal, R. v.:* Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig I, 1908, S. 286/89.
7. *Mannheim, A.:* Principes et développements de géométrie cinématique. Paris 1894, S. 364/79, 536/37, 541.
8. *Picard, E.:* Traité d'Analyse I. Paris 1891, S. 368/71; 1901, S. 394/96.
9. *Scheffers, G.:* Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie I. Leipzig 1901, S. 322/27, 1910, S. 432/45.
10. *Schell, W.:* Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Leipzig, 1. A. 1859, S. 78; 2. A. 1898, S. 108/15.
11. *Serret, P.:* Théorie nouvelle géometrique et mécanique des lignes à double courbure. Paris 1860, S. 109/17.

12. *Tannenberg, W. de:* Leçons nouvelles sur les applications géométriques du calcul différential. Paris 1899, S. 89/90.

Außerdem:

13. *Enzyklopädie* der math. Wiss. III. D. 4, S. 230/37.

II. Abhandlungen.

14. *1844. De Saint-Venaut:* Mémoire sur les lignes courbes non planes. Journ. de l'Ec. Pol. XVIII (Cah. 30), S. 48, Anmerk.
15. *1850. Bertrand:* Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure. Journ. de Math. XV, S. 332/50 und Comptes Rendus 31, S. 624/24.
16. *1851. Serret, J.-A.:* Sur un théorème relatif aux courbes à double courbure. Journ. de Math. XVI, S. 499.
17. *1856. Curtis, A.-H.:* Sur la surface engendrée par les normales principales d'une courbe. Journ. de Math. (2) 1, S. 223/29.
18. *1862. Bour:* Théorie de la déformation des surfaces. Journ. de l'Ec. imp. polyt. Cah. 39, S. 52/53.
19. *1871. Laguerre:* Sur une propriété de l'hyperboloide de révolution. Bull. des scienc. math. et astr. 2, S. 279/82.
20. *1872. Mannheim:* Sur la surface gauche, lieu des normales principales de deux courbes. Journ. de Math. 2, 17, S. 406/17.
21. *1877. Mannheim:* Sur les courbes ayant les mêmes normales principales et sur la surface formée par ces normales. Comptes Rendus 85, S. 212/16.
22. *Niewenglowski:* Notes sur les courbes qui ont les mêmes normales principales. Comptes Rendus 85, S. 394/95.
23. *Mannheim:* Nouveau mode de représentation plane de classes de surfaces reglées. Comptes Rendus 85, S. 788/91.
24. *Mannheim:* Applications d'un mode de représentation plane de classes de surfaces reglées. Comptes Rendus 85, S. 847/50.
25. *Mannheim:* Nouvelles applications d'un mode etc. Comptes Rendus 85, S. 943.

26. *1877/78. Fais:* Intorno alle curve gobbe aventi le stesse normali principali. Rendic. di Bologna, S. 25/26 und Memorie di Bologna 8, S. 609/24.
27. *1878. Mannheim:* De l'emploi de la courbe représentative de la surface des normales principales d'une courbe gauche pour la démonstration de propriétés relatives à cette courbe. Comptes Rendus 86, S. 1254/57.
28. *1879. Hoppe:* Über die Bedingung, unter welcher eine variable Gerade Hauptnormale einer Kurve sein kann, und verwandte Fragen. Archiv der Math. und Phys. (Grunert) 63, S. 369.
29. *1881. Enneper:* Zur Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Nachrichten d. Kgl. Ges. d. Wissensch. Göttingen, S. 291/301.
30. *1885. Mannheim:* Liaison géométrique entre les sphères osculatrices de deux courbes qui ont les mêmes normales principales. Proc. of Lond. Math. Soc. XVI, S. 273/76.
31. *1887. Pellet:* Sur les normales aux courbes. Comptes Rendus 104, S. 1501/02.
32. *Goursat:* Sur un problème relatif aux courbes à double courbure. Annales de Toulouse I. C., S. 21/23.
33. *Pirondini:* Sulle superficie rigate. Giorn. di Math. XXV, S. 35.
34. *1888. Cesaro:* Question de géométrie intrinsèque. Nouv. Ann. de math. III, 7, S. 147/52.
35. *Pellet:* Sur les surfaces réglées applicables sur une surface de révolution. Comptes Rendus 106, S. 654.
36. *Bioche:* Sur certaines surfaces réglées à propos d'une note de M. Pellet. Comptes rendus 106, S. 829/30.
37. *Demartres:* Sur les courbes de M. Bertrand considérées comme lignes géodésiques de surfaces réglées. Comptes Rendus 106, S. 1065.
38. *Koenigs:* Sur le volume engendré par un contour lié invariablement au trièdre d'une courbe, et, en particulier sur une propriété des courbes de M. Bertrand. Comptes Rendus 107, S. 474/76.
39. *1890. Pirondini:* Sur les trajectoires orthogonales d'une ligne mobile. Nouv. Ann. de math. III. 9, S. 297/317.

40. *1890/91. Bioche:* Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle constant la développable des tangentes. Bull. de la Soc. Math. de France 19, S. 124/25.
41. *1892. Cesaro:* Sulle curve di Bertrand. Rivista di Mat. 2, S. 153/59.
42. *Rouquet:* Applications des formules générales de la théorie des courbes de M. Bertrand. Mém. de Toulouse 9. 4., S. 241/64.
43. *1893. Pirondini:* Intorno alle indicatrici sferiche delle linee dello spazio. Rivista di Mat. 3, S. 27/39.
44. *Bioche:* Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe. Nouv. Ann. de math. III. 12, S. 412/19.
45. *Demoulin:* Sur une généralisation des courbes de M. Bertrand. Comptes Rendus 116, S. 246/49.
46. *Demoulin:* Sur une classe particulière de courbes gauches. Bull. de la Soc. Math. de France 21, S. 9/13.
47. *1894. Molins:* Sur une famille de courbes gauches dont la courbure et la torsion sont liées par une relation linéaire et dont les coordonnées de chaque point s'expriment sous forme finite et explicite. Mém. de Toulouse 9. 6, S. 394/420.
48. *Cesaro:* Nouvelle propriété caractéristique des courbes de Bertrand. Mathesis 2. 4, S. 265/68.
49. *1896. Rouquet:* Sur un cas particulier du mouvement à cinq conditions. Ann. de Toulouse 10 F.
50. *Rouquet:* Note sur un cas etc. Mém. de Toulouse 9. 8, S. 264/69.
51. *Andrade:* Sur les droites de contact des courbes gauches et sur une famille de courbes gauches. Comptes Rendus 122, S. 1110/13.
52. *1899. Lem:* Analytische Theorie der ruimtekrommen. Diss. Leiden, S. 69.
53. *1900. Cesaro:* Remarques sur certaines questions de géométrie intrinsèque. Mathesis 2. 10, S. 5/11, 37/42.
54. *Hatzidakis:* Sur une relation géométrique entre deux courbes Bull. des scienc. math. 2. 24, S. 45.
55. *1900/01. Razzaboni:* Un teorema del signor Demartres generalizzato. Atti del Ist. Veneto 60, S. 757/68.

56. *1901. Rouquet:* Note sur la surface réglée engendrée par une droite faisant partie d'un système invariable mobile. Mém. de Toulouse 10. 1, S. 9/20.

57. *1903. Schell:* Synthetische Behandlung einiger Probleme über Kurven doppelter Krümmung. Archiv d. Math. und Phys. III. 5, S. 8.

58. *Razzaboni:* Delle superficie nelle quali un sistema di geodetische sono curve de Bertrand. Mem. di Bologno V. 10, S. 539/48.

59. *1905. Rouquet:* Sur une propriété caractéristique des courbes de M. Bertrand et son application à la recherche des surfaces dont les lignes asymptotiques d'une famille sont des courbes égales. Mém. de Toulouse 10. 5, S. 180/99.

60. *Salkowski:* Zur Bestimmung aller Raumkurven, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht. Sitzungsber. d. Berl. math. Ges. IV, S. 67.

61. *1906. Hatzidakis:* Sur les courbes de M. Cesaro. Ann. Scient. de l'Univers. Nat. d'Athènes, S. 316, 326/38.

62. *Sannia:* Sulle curve le cui tangenti sono ortogonali alle normali principali di una curva data. Giorn. di Mat. 44, S. 351.

63. *1908. Darboux:* Sur un problème relatif à la théorie des courbes gauches. Comptes Rendus 146, S. 882.

64. *Salkowski:* Über die zweite rektifizierende Fläche einer Raumkurve. Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges. VIII, S. 27/30.

65. *1909. Gräbner:* Algebraische Bertrand-Kurven und algebraische Kurven konstanter Torsion. Diss. Würzburg.

66. *Voß:* Über Kurvenpaare im Raume. Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. der Wiss. München (Math.-nat. Klasse). Abhandl. 19, S. 17, 43, 75/77.

67. *1910. Salkowski*: Über Kurvenpaare im Raume. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 19, S. 247.

68. *Salkowski*: Beiträge zur Kenntnis der Bertrandschen Kurven. Math. Ann. 69, S. 560/79.

69. *Pfeifer*: Das die Raumkurven begleitende Dreikant. Schulprogramm Würzburg.

70. *1911. Joachimi*: Über Kurven, bei denen die beiden Krümmungen durch eine quadratische Beziehung verknüpft sind. Diss. Münster, S. 19, 22.
71. *Salkowski*: Die Cesaroschen Kurven. Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. d. Wiss. München (Math.-nat. Klasse), S. 523/37.
72. *1911. Mohr*: Die Bertrandschen Kurven in der Theorie der Normalensysteme. Diss. Straßburg.
73. *1912. Gräbner*: Die Schmiegungsschraubenlinien von Raumkurven. Archiv d. Math. u. Phys. 20, S. 18, 24/27.
74. *1913. Salkowski*: Zum Biegungsproblem der Regelflächen. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 22, S. 68.
75. *1913. Moschkowitsch*: Über Raumkurven, bei denen eine mit dem begleitenden Dreikant fest verbundene Gerade eine abwickelbare Fläche erzeugt. Diss. Jena, S. 9, 55/56.

B. Über Kurven, zwischen deren Krümmungen eine Beziehung zweiten Grades besteht.

I. Lehrbücher.

76. *Cesaro-Kowalewski*: Vorlesungen über natürliche Geometrie. Leipzig 1901, S. 189/92, 228.
77. *Lilienthal, R. v.*: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig II_1 1913, S. 96/97.
78. *Mannheim, A.*: Principes et développements de géométrie cinématique. Paris 1894, S. 532/37.
79. *Scheffers, G.*: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie I. Leipzig 1901, S. 252/53.
80. *Schell*: Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Leipzig 1898, S. 140.
81. *Enzyklopädie* der math. Wissenschaften III., D. 4, S. 245/47.

II. Abhandlungen.

82. *1872. Laurent, H.*: Mémoire sur la théorie des courbes gauches. Ann. de l'Ec. norm. sup. II. 1, S. 22/24.

83. *1877. Mannheim*: Applications d'un mode de représentation plane de classes de surfaces réglées. Comptes Rendus 85, S. 847/50.

84. *1879. Hoppe*: Über die Bedingung, unter welcher eine variable Gerade Hauptnormale einer Kurve sein kann, und verwandte Fragen. Archiv d. Math. u. Phys. (Grunert) 63, S. 372.

85. *1884. Cesaro*: Théorème de cinématique. Nouv. Ann. de math. III. 3, S. 434/36.

86. *1885. Pirondini*: Studii geometrici relativi spezialmente alle superficie gobbe. Giorn. di Mat. XXIII, S. 318/24.

87. *1887. Pellet*: Sur les normales aux courbes. Comptes Rendus 104, S. 1501/02.

88. *1888. Cesaro*: Question de géométrie intrinsèque. Nouv. Ann. de math. III. 7, S. 147/52.

89. *1889. Cesaro*: Remarques sur les surfaces gauches. Nouv. Ann. de math. III. 8, S. 445/58.

90. *1892. Cesaro*: Sulle curve di Bertrand. Riv. di Mat. 2, S. 153/59.

91. *1893. Demoulin*: Sur une généralisation des courbes de M. Bertrand. Comptes Rendus 116, S. 246/49.

92. *Demoulin*: Sur une classe particulière des courbes gauches. Bull. de la Soc. Math. de France 21, S. 9/13.

93. *1894. Pirondini*: Sur les surfaces réglées. Jornal de Sciencias Math. e Astr. (Teixeira) Coimbra 12, S. 19/42.

94. *1894. Balitrand*: Un problème sur les courbes gauches. Mathesis 2. 4, S. 159/61.
Cesaro: Interméd. des Math. S. 92.

95. *1896. Andrade*: Sur les droites de contact des courbes gauches et sur une famille de courbes gauches. Comptes Rendus 122, S. 1110/13.

96. *1899. Hatzidakis*: Interméd. des Math. VI, S. 104/07.

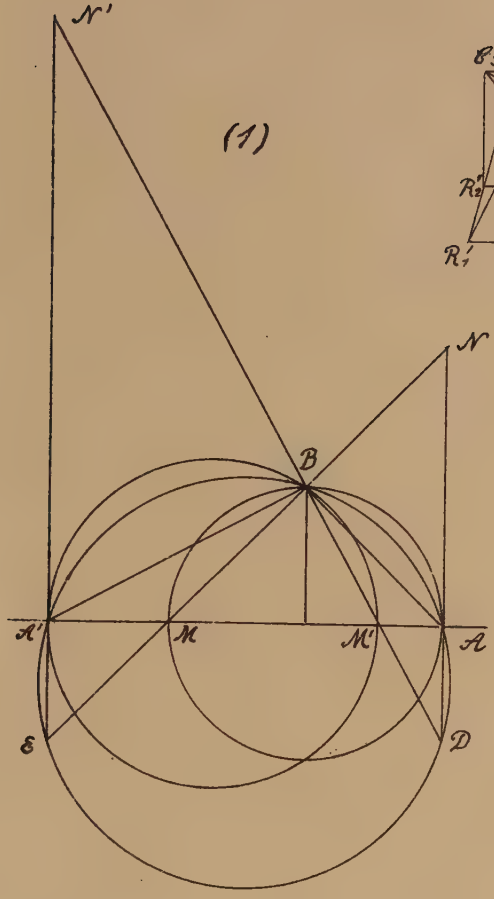
97. *Cesaro*: S. 153/55.

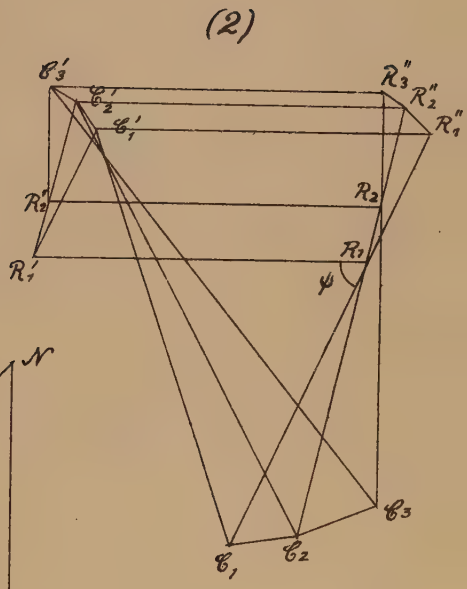
98. *1900. Cesaro*: Remarques sur certaines questions de géométrie intrinsèque. Mathesis 2. 10, S. 5/11, 37/42, 57/62.

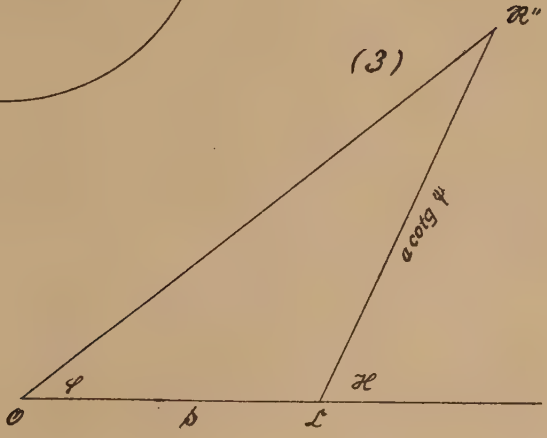
99. *Hatzidakis*: Sur une relation géométrique entre deux courbes. Bull. des scienc. math. 2. 24, S. 42/48, 190.

100. *1901. Rouquet*: Note sur la surface réglée engendrée par une droite faisant partie d'un système invariable mobile. Mém. de Toulouse 10. 1, S. 9/20.
101. *1905/06. Miller*: Note on tortuous curves. Proc. of Edinb. Math. Soc. 24, S. 51/55.
102. *Sannia*: Sulle curve le cui tangenti sono ortogonali alle normali principali di una curva data. Giorn. di Mat. 44, S. 342/53.
103. *1906. Hatzidakis*: Sur les courbes de M. Cesaro. Ann. Scient. de l'Univ. Nat. d'Athènes, S. 316/43.
104. *1908. Salkowski*: Über die zweite rektifizierende Fläche einer Raumkurve. Sitzungsber. d. Berl. math. Ges. VIII, S. 27/30.
105. *1909. Voß*: Über Kurvenpaare im Raume. Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. der Wiss. München (Math.-nat. Klasse), Abhandl. 19, S. 17 Anmerk. u. S. 29/31 Anmerk.
106. *1910. Pfeifer*: Das die Raumkurven begleitende Dreikant. Schulprogramm Würzburg.
107. *Salkowski*: Über Kurvenpaare im Raume. Jahresbericht d. Deutsch. Math.-Ver. 19, S. 239/54.
108. *1911. Joachimi*: Über Kurven, bei denen die beiden Krümmungen durch eine quadratische Beziehung verknüpft sind. Diss. Münster.
109. *Salkowski*: Die Cesaroschen Kurven. Sitzungsber. d. Kgl. Bayr. Akad. d. Wiss. München (Math.-nat. Klasse), S. 523/37.
110. *1912. Gräbner*: Die Schmiegungsschraubenlinien von Raumkurven. Archiv d. Math. u. Phys. 20, S. 27/28.
111. *1913. Salkowski*: Zum Biegungsproblem der Regelflächen. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 23, S. 64/67, 71.
112. *Moschkowitsch*: Über Raumkurven, bei denen eine mit dem begleitenden Dreikant fest verbundene Gerade eine abwickelbare Fläche erzeugt. Diss. Jena.

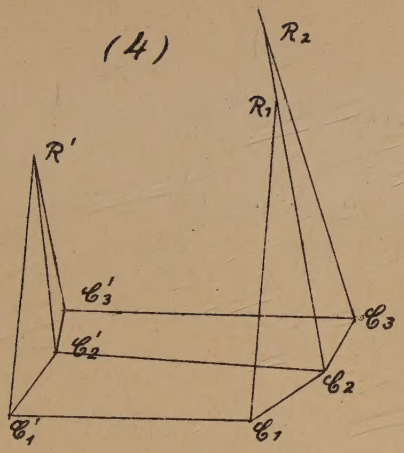
Von Arbeiten, die mir während der Drucklegung bekannt geworden sind, möchte ich noch drei von *Gräbner* erwähnen, die im Schulprogramm Würzburg 1913 u. 1915 und im Archiv d. Math. u. Phys. 1916, 24. Band, Heft 4, S. 316/41 veröffentlicht sind.


N'
(1)
N
B
A'
M
M'
A
E
D

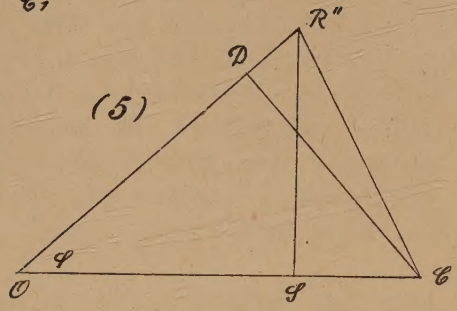

(2)
B'3
B'2
B'1
R''3
R''2
R''1
R'2
R2
R'1
R1
ψ
B3
B1
B2


(3)
R''
a cotg ψ
φ
H
O
b
L

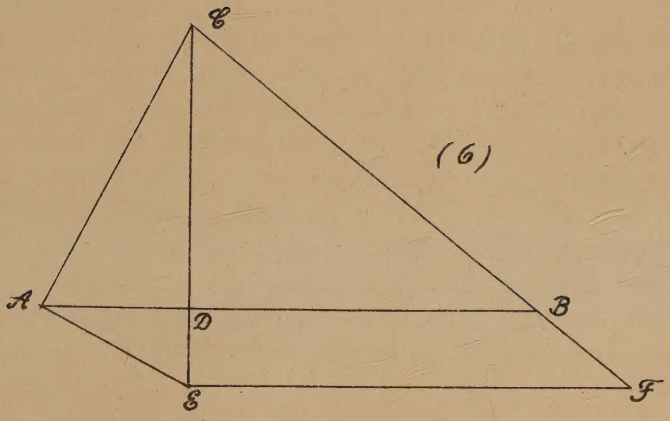
(4)



(5)



(6)



Lebenslauf.

Ich, Friedrich Klaucke, evang. Konfession, wurde am 7. Januar 1890 als Sohn des Bäckermeisters Friedrich Klaucke und seiner Ehefrau Marie, geb. Noack, zu Spremberg (Lausitz) geboren. Meine Schulbildung erhielt ich auf dem Realgymnasium meiner Vaterstadt, das ich Ostern 1910 mit dem Zeugnis der Reife verließ, um an den Universitäten Göttingen (S.-S. 1910 bis W.-S. 1911), München (S.-S. 1911), Berlin (W.-S. 1911/12) und Halle (seit S.-S. 1912) Mathematik und Naturwissenschaften zu studieren. Am 27. Januar 1914 wurde mir für die Lösung der von der Philosophischen Fakultät der Universität Halle gestellten Preisaufgabe: „Die Untersuchungen über Raumkurven, zwischen deren Krümmungen eine Beziehung besteht, sind zusammenzustellen und zu ergänzen und zwar möglichst in der Hinsicht, daß eine Beziehung dritten Grades angenommen wird", der Preis zuerkannt.

Im August 1914 trat ich als Kriegsfreiwilliger beim Feldartillerie-Regiment 5 ein, von dem ich zum Reserve-Feldartillerie-Regiment 50 versetzt wurde, wo ich am 9. Dezember 1914 das Eiserne Kreuz II. Klasse erhielt und am 1. Juli 1916 zum Vizewachtmeister befördert wurde.

Meine akademischen Lehrer waren in Göttingen: Baumann, Landau, Prandtl, Riecke, Runge, Toeplitz, Winkler; in München: v. Drygalski, Ebert, Geiger, Graetz, Günther, v. Zahn; in Berlin: Blasius, Braun, Knopp, Penck, Planck, H. A. Schwarz; in Halle: Dorn, Fries, Gutzmer, Haecker, Karsten, Krueger, Schenck, Schlüter, Schmidt, Walther, Wangerin, Wiegand.

Ihnen allen bin ich zu großem Danke verpflichtet. Ganz besonderen Dank schulde ich den Herren Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Wangerin und Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. A. Gutzmer, die mir bei meinem mathematischem Studium oft mit Rat zur Seite gestanden haben.